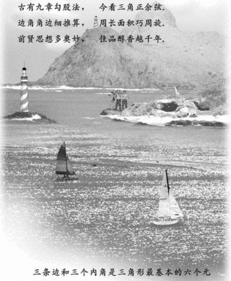
第8章

解三角形

近测高塔远看山，　量天度海只等闲.
古有九章勾股法，　今看三角正余弦.
边角角边细推算，　周长面积巧周旋.
前贤思想多奥妙，　佳品醇香越千年.



三条边和三个内角是三角形最基本的六个元素. 由这六个元素中的三个元素（其中至少要有一条边）去定量地求出三角形的其余的边和角的过程叫作解三角形. 本章学习解三角形及其在各种测绘问题中的应用.

问题探索

神奇的三角形

百慕大三角位于百慕大群岛、波多黎各岛和佛罗里达半岛之间.

我们大家从儿童时代起就熟悉了三角形，知道它有三个角，三条边……但是：

你可能没有听说过：神秘的百慕大三角，在那里轮船和飞机常常消失得无踪无影！

你可能没有想过：人的两只眼睛去观察一个物体，也能产生一个三角形.

你可能没有看过：在描绘一个实际上不可能存在的物体时，平面上画出的图形有欺骗性. 如图 8-1，图(a)的物体是很容易实际构作的，而图(b)则是彭罗斯提出的一个不可实现的对象——彭罗斯三角形.

图 8-1

你可能没有试过：在水洼的帮助下测量树的高度. 有一次儿子与父亲一起经过庭园，看见在庭园中间生长着一棵大树. 不久前下过雨，并且在庭园里积了许多不大的水洼. 儿子问父亲："这棵树的高度是多少？"父亲回答："我们不妥猜，可以设法计算它的高度. 我知道自己身高是 180 cm，眼睛位置的高度等于 170 cm，我的步伐长等于 90 cm. 现在我这样站着，使得我能见到树顶在该水洼中的影子. 从我到影子有 3 步，从影子到树有 30 步."你能根据故事所描述的情形（如图 8-2），算出树的高度吗？

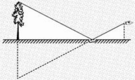


图 8-2

你可能没有做过：在不过河的情况下，利用测角仪、皮尺，确定这河岸一侧 A，B 两点距河对岸电视塔点 C 处的距离（如图 8-3）.

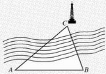


图 8-3

又如，在有建筑物阻挡的情况下，如何测量该建筑物两侧 A，B 两点间的距离（如图 8-4）.

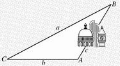


图 8-4

你可能没有分过：在一块三角形形状的地区上打 4 口井. 现在要把这个地区分成小区，使这些小区有同样的形状、相等的面积，并且在每一个小区上都有一口井. 怎样划分？

以上种种都与三角形有关.

8.1 正弦定理

现实生活中涉及的测绘问题有很多，如：测量河宽、山高等，往往由于地形条件的制约，有一些数据不易被直接测量．这时就需要我们利用一些易测量的数据，然后通过计算求得不易被直接测量的数据．

问题探索中提出一个实际问题（如图 8-3），在河岸一侧有 A，B 两点，需要确定这两点距河对岸的电视塔点 C 处的距离．现可以测量 AB 的长以及图中角 A 和角 B 的大小，如何利用这三个条件去求 AC，BC 的长度呢？

为了解决这类问题，我们先来学习三角形中边、角及面积之间的一些基本关系．

如图 8-5 所示，对任意 $\triangle ABC$，以 $\triangle ABC$ 的顶点 A 为坐标原点，AB 边所在直线为 x 轴，建立直角坐标系．

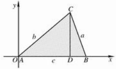


图 8-5

设 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 中角 A，B，C 所对边的边长，CD 为 AB 边上的高，则点 B，C 的坐标分别为 $B(c, 0)$，$C(b\cos A, b\sin A)$，$|CD|=b\sin A$．于是，$\triangle ABC$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

同理可得，　$S=\frac{1}{2}ac\sin B$ 和 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$.

正弦定理还可以利用向量和其他方法来证明，请你尝试一下．

这就是说，三角形的面积等于任意两边与它们的夹角的正弦值之积的一半．

将等式 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$ 中的每个式子都除以

$\frac{1}{2}abc$，得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

在三角形中，各边与它所对角的正弦的比值相等，这个结论就叫作三角形的正弦定理（sine theorem of triangles）.

在 $C=90°$，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形的情况下，由 $\sin C=1$，得 $a=c\sin A$，$b=c\sin B$，因此，正弦定理是直角三角形相应结论的一个推广.

正弦定理是由伊朗著名的天文学家阿布尔-威发（公元 940—998）首先发现与证明的. 中亚细亚人阿尔比鲁尼（公元 973—1048）给三角形的正弦定理作出了一个证明. 也有说正弦定理的证明是 13 世纪的阿塞拜疆人纳速拉丁在系统整理前人成就的基础上得出的.

例 1 在本节开头的实例（如图 8-3）中，我们测得如下数据：$AB=400$ m，$A=45°$，$B=60°$，求 AC 和 BC.

解 ∵ $A=45°$，$B=60°$，

∴ $C=180°-(45°+60°)=75°$.

∵ $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，

$\sin 75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

∴ $BC=\frac{AB\sin A}{\sin C}=\frac{400\sin 45°}{\sin 75°}$

$=400(\sqrt{3}-1)\approx 292.82$ (m).

$AC=\frac{AB\sin B}{\sin C}=\frac{400\sin 60°}{\sin 75°}=\frac{200\sqrt{3}}{\sin 75°}$

$=200\sqrt{3}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\approx 358.63$ (m).

上例实际上说明了如果已知三角形两个角和一条边的大小，则由三角形的内角和为 180°，立刻可得到它的第三个角的值，再利用正弦定理，可算出它的另外两条边的大小.

正弦定理可以用于解决已知两角和一边求另两边和一角的问题.

问题：如果已知三角形的两条边及一条边所对的角的大小，利用正弦定理能够算出三角形的其余的边和角的大小吗？

例 2 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A=30°$，$c=8$，$a=5$，求 B 和 b（结果保留两位小数）.

在三角形中，已知一个角的正弦值，可以通过计算器查得相应的锐角，并通过角所在象限确定这个角的其他值.

解 由正弦定理，得 $\frac{8}{\sin C}=\frac{5}{\sin 30^\circ}$，$\sin C=\frac{4}{5}$，

∴ $C\approx 53.13^\circ$ 或 $C\approx 180^\circ-53.13^\circ=126.87^\circ$.

(1) 当 $C=53.13^\circ$ 时，$B=180^\circ-(30^\circ+53.13^\circ)=96.87^\circ$，

$b=\sin 96.87^\circ\cdot\frac{5}{\sin 30^\circ}\approx 9.93$.

(2) 当 $C=126.87^\circ$ 时，$B=180^\circ-(30^\circ+126.87^\circ)=23.13^\circ$，

$b=\sin 23.13^\circ\cdot\frac{5}{\sin 30^\circ}\approx 3.93$.

因此，$B=96.87^\circ$，$b=9.93$ 或 $B=23.13^\circ$，$b=3.93$.

正弦定理也可以用于解决已知两边及一边的对角求另外两角和一边的问题.

例3 在△ABC 中，已知 $A=30^\circ$，$c=3$，$a=5$，求 B 和 b（结果保留两位小数）.

解 由正弦定理，得

$$\sin C=3\cdot\frac{\sin 30^\circ}{5}=0.3,$$

$$C\approx 17.46^\circ \text{或} C\approx 180^\circ-17.46^\circ=162.54^\circ.$$

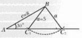
∵ $A=30^\circ$，

∴ $C<150^\circ$.

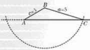
由此得到 $C=17.46^\circ$，$B=180^\circ-(30^\circ+17.46^\circ)=132.54^\circ$.

因此，$B=132.54^\circ$，　$b=\sin 132.54^\circ\cdot\frac{5}{\sin 30^\circ}\approx 7.37$.

为什么例2有两解，而例3只有一解呢？



例2图



例3图

通过根据已知条件利用几何作图作三角形，可以清楚地看到例2有两解，而例3只有一解.

一般地，已知两边和其中一边的对角解三角形，有两解、一解、无解三种情况.

1. 当 A 为锐角时，如图8-6所示.

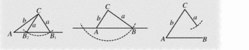


图 8-6

2. 当 A 为直角或钝角时，如图8-7所示.

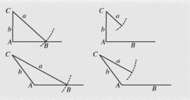


图 8-7

问题：在直角三角形中，正弦定理表明：一边的长同它所对的角的正弦值之比是一个常数，这个常数的几何意义是什么？

对于一般的三角形，这个常数的几何意义又是什么？

对锐角$\triangle ABC$，设圆O是$\triangle ABC$的外接圆，R是圆O的半径，过B作圆O的直径BD，联结CD（如图 8-8）。由于$\angle CDB$和$\angle CAB$都是圆O中同一条弧所对的圆周角，利用平面几何中同弧所对的圆周角相等的定理，得$\angle D=\angle A$，$\angle DCB$是半圆弧所对的圆周角，半圆弧上的圆周角一定是直角，所以$\angle DCB=90°$．于是，$a=BC=BD\sin D=2R\sin A$．因此，

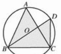


图 8-8

对直角三角形、钝角三角形这个结论也成立．请同学们自己证明．

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

正弦定理的变形：

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

和 $a=2R\sin A$，

$b=2R\sin B$，

$c=2R\sin C$．

这个结果称为扩充的正弦定理（extended sine theorem），并且解释了$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$的几何意义，这个常数实际上是$\triangle ABC$的外接圆的直径．

例 4 在$\triangle ABC$中，已知它的外接圆半径$R=1$，$a=1$，$B=20°$，求b及$\triangle ABC$的面积S．

解 由扩充的正弦定理，得 $b=2R\sin B=2\sin 20°\approx 0.68$，$\sin A=\frac{a}{2R}=\frac{1}{2}$，可知 $A=30°$或$150°$．

你能够用作图的方法看出满足已知条件的三角形确实有两个吗？

(1) 当 $A=30°$时，$C=130°$，

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\sin 20°\cdot\sin 130°\approx 0.26.$$

(2) 当 $A=150°$时，$C=10°$，$S=\sin 20°\cdot\sin 10°\approx 0.06$.

因此，在$\triangle ABC$中，$b=0.68$，面积 $S=0.26$ 或 0.06.

例 5 设 R 是$\triangle ABC$的外接圆的半径，S 是$\triangle ABC$的面积，求证：

(1) $S=\frac{abc}{4R}$；

(2) $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

证明 (1) 由扩充的正弦定理，$\sin C=\frac{c}{2R}$，

所以 $$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}.$$

(2) 由 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，得

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

练 习

1. 在$\triangle ABC$中，A，B，C所对边分别为a，b，c，则$\frac{2a}{\sin A}-\frac{b}{\sin B}-\frac{c}{\sin C}$的值为_______.

2. 在$\triangle ABC$中，$a=1$，$b=\sqrt{2}$，$A=30°$，则 B 等于_______.

3. 在$\triangle ABC$中，$b=\sqrt{3}$，$B=60°$，$c=1$，求 a 和 A，C.

4. 已知 $c=\sqrt{3}$，$\angle A=45°$，$\angle B=60°$，求$\triangle ABC$的外接圆面积.

习题 1

学而时习之

1. 在$\triangle ABC$中，$a=7$，$B=30^\circ$，$C=85^\circ$，求 c.
2. 在$\triangle ABC$中，$a=13$，$b=21$，$A=40^\circ$，求 C.
3. 在$\triangle ABC$中，$a=8$，$b=7$，$B=60^\circ$，求 c.
4. 在$\triangle ABC$中，$a=3$，$c=3\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，解这个三角形，并求$\triangle ABC$的面积.
5. 在$\triangle ABC$中，已知 $a=4$，$b=4\sqrt{2}$，$\triangle ABC$的外接圆面积为 16π，求三内角.

温故而知新

6. 在$\triangle ABC$中，如果 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，求证：$C=90^\circ$. 这个命题的逆命题是否成立？试证明你的结论.
7. $\triangle ABC$中，$C=2B$，角 B，C 所对应的边分别为 b，c，试求$\frac{c}{b}$的取值范围.

8.2 余弦定理

在本章开始的“问题探索”中，我们给出了这样一个实例：如图 8-4，在一建筑物两侧有 A，B 两点，现要测量 A，B 两点间的距离.

我们可以测量 AC，BC 的长以及图中角 C 的大小，如何利用这三个条件去求 AB 的长度呢？这一问题的实质是：利用两边和夹角去求第三边.

如图 8-9，以$\triangle ABC$的顶点 C 为坐标原点，CA 边所在直线为 x 轴，建立直角坐标系. 点 A，B 的坐标分别为 $A(b,0)$，$B(a\cos C,a\sin C)$.

根据两点间的距离公式，得

$$
\begin{aligned}
c^2 &= (a\cos C-b)^2+a^2\sin^2 C \\
&= a^2\cos^2 C-2ab\cos C+b^2+a^2\sin^2 C \\
&= a^2+b^2-2ab\cos C,
\end{aligned}
$$

即 $\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$

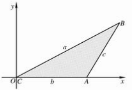


图 8-9

同理可得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B.$$

由上可知：三角形的一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦值乘积的两倍，这个结论叫作三角形的余弦定理(cosine theorem of triangles)．即

$$
\begin{aligned}
c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\
a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\
b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B
\end{aligned}
$$

余弦定理也可以写成下面的形式

$$
\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}
$$

$$
\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}
$$

$$
\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}
$$

探索问题，余弦定理的这种证明方法是几何问题代数化的证明方法，即解析法，你能给出余弦定理的其他证明方法吗？

你是否还记得在第4章“向量”中，由公式

$\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})^2=\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{CA}^2-2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$

得出过余弦定理？

当 $C=90°$ 时，余弦定理变形为 $c^2=a^2+b^2$，因此勾股定理是余弦定理的特例．

例1 已知$\triangle ABC$的三边分别为$a=6$，$b=10$和$c=14$，试求$\triangle ABC$中最大角的度数．

解 根据三角形中大边对大角的原理，$\angle C$是$\triangle ABC$的最大内角，由余弦定理，得

$$\cos C=\frac{6^2+10^2-14^2}{2\cdot 6\cdot 10}=-\frac{1}{2}.$$

因为C是三角形的内角，$0°<C<180°$，所以$C=120°$，因此，$\triangle ABC$中最大角的度数为$120°$．

余弦定理的作用之一：已知三角形的三条边长，可求出三个内角．

例2 在$\triangle ABC$中，已知$a=\sqrt{6}$，$b=1+\sqrt{3}$，$C=45°$，求c和A．

解 由余弦定理，得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$=6+(1+\sqrt{3})^2-2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4,$$

$\therefore$ $c=2$．

余弦定理的作用之二：已知三角形的两边及夹角，可求出第三边．

再由余弦定理

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(1+\sqrt{3})^2+4-6}{2(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{1}{2}.$$

因为A为三角形的内角，$0°<A<180°$，所以$A=60°$．

例3 在$\triangle ABC$中，S是$\triangle ABC$的面积，若$a=4$，$b=5$，$S=5\sqrt{3}$，求c．

解 $\because$ $S=\frac{1}{2}ab\sin C$，

$\therefore$ $5\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times 4\times 5\sin C$，

$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$C=60°$ 或 $C=120°$．

你又能用作图的方法看出满足条件的三角形确实有两个吗？

根据余弦定理，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

当$C=60°$时，$c^2=a^2+b^2-ab=21$，$c=\sqrt{21}$；

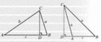
当$C=120°$时，$c^2=a^2+b^2+ab=61$，$c=\sqrt{61}$．

所以，c为$\sqrt{21}$或$\sqrt{61}$．

例4 在$\triangle ABC$中，求证：$c=b\cos A+a\cos B$．

余弦定理的作用之三：将角的余弦值用边来表示．

看看下面的图，算算 AD、BD，你能否得出另一个证明方法？



证明 ∵ $a\cos B+b\cos A=a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$=\frac{a^2+c^2-b^2+b^2+c^2-a^2}{2c}$$

$$=\frac{2c^2}{2c}$$

$$=c,$$

∴ $c=a\cos B+b\cos A$.

例 5 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 且 B 是锐角，试判断此三角形的形状．

解 由 $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 及 $0^\circ<B<90^\circ$，得 $B=45^\circ$.

由 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$，得 $c=\sqrt{2}a$.

根据余弦定理，$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B=2a^2+a^2-2a^2=a^2$，

∴ $b=a$.

∵ $B=45^\circ$，

∴ $A=45^\circ$，$C=90^\circ$.

从而 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形．

练　习

1. 在 $\triangle ABC$ 中：

   (1) 已知 $b=8$，$c=3$，$A=60^\circ$，求 a；

   (2) 已知 $a=9$，$b=10$，$c=15$，求 A；

   (3) 已知 $a=20$，$b=29$，$c=21$，求 B.

2. 在本节开头的实例中（如图 8-4），我们实地测得：$a=300$ m，$b=180$ m，$C=30^\circ$，求 AB 长．

3. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$，求 C.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$AC=3$，$BC=4$，求 $\triangle ABC$ 的面积．

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$CB=2$，$AC=2\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，求 AB 边的中线长．

习题 2

学而时习之

1. 已知$\triangle ABC$中$a=3$，$b=4$，$c=\sqrt{37}$，求$\angle C$的大小.
2. 已知$\triangle ABC$的三边之比为$\sqrt{7}:2:1$，求最大的内角.
3. 已知$\triangle ABC$中$a=3$，$b=5$，$\sin C=\frac{4}{5}$，求c.
4. 已知三角形的三条边长分别为 5，7 和 3，求此三角形的面积.
5. 已知$\triangle ABC$中$a=3$，$b=2\sqrt{3}$，$\angle B=150°$，求c.

温故而知新

6. 求证：一个三角形是钝角三角形的充要条件是三角形内有一边的平方大于另两边的平方和.
7. 已知$\triangle ABC$中，$a\cos B=b\cos A$，试判断三角形的形状.
8. 已知圆内接四边形$ABCD$的边长分别为$AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$，求四边形$ABCD$的面积.

8.3 解三角形的应用举例

解三角形的应用问题，通常都要根据题意，从实际问题中抽象出一个或几个三角形，然后通过解这些三角形，得出所要求的量，从而得到实际问题的解. 在这个过程中，贯穿了数学建模的思想. 这种思想即是从实际问题出发，经过抽象概括，把它转化为具体问题中的数学模型，然后通过推理演算，得出数学模型的解，再还原成实际问题

的解.

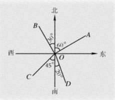


图 8-10

在航海中，由于南北方向比较便于测量，通常以南北方向作为标准方向，用北偏东若干度、北偏西若干度、南偏东若干度、南偏西若干度来表示方向，例如 OA，OB，OC，OD 的方向角分别用北偏东 $60°$，北偏西 $30°$，南偏西 $45°$，南偏东 $20°$来表示，如图 8-10 所示.

例 1 一货轮航行到 M 处，测得灯塔 S 在货轮的北偏东 $15°$相距 20 海里处，随后货轮按北偏西 $30°$ 的方向航行，半小时后，又测得灯塔在货轮的北偏东 $45°$，求货轮的速度.

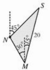


图 8-11

解 如图 8-11，$\angle SMN=15°+30°=45°$，$\angle SNM=180°-45°-30°=105°$.

可知 $\angle NSM=180°-45°-105°=30°$.

由正弦定理 $$\frac{MN}{\sin 30°}=\frac{20}{\sin 105°},$$

得 $$MN=\frac{20\sin 30°}{\sin 105°}=10(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

∴ 货轮的速度为 $10(\sqrt{6}-\sqrt{2})\div\frac{1}{2}=20(\sqrt{6}-\sqrt{2})\approx 20.7$（海里/时）.

答：货轮速度为 20.7 海里/时.

例 2 我缉私船发现位于正北方向的走私船以 50 海里/时的速度向北偏东 $45°$方向的公海逃窜，已知缉私船的最大速度是 60 海里/时. 当发现走私船时，两船之间的距离不超过多少海里才能保证缉私船在 15 分钟内截住走私船.

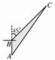


图 8-12

解 当发现走私船时，设缉私船 A 和走私船 B 之间的距离为 x 海里. BC 为走私船的逃窜路线，如图 8-12 所示，

由题意，$\angle ABC=135^\circ$. 设缉私船在 C 处截住走私船，并设缉私船截住走私船所需最短时间为 t 小时，于是 $AC=60t$，$BC=50t$. 根据余弦定理，得

$$(60t)^2=(50t)^2+x^2-100xt\cos 135^\circ,$$

即 $$1\,100t^2-50\sqrt{2}xt-x^2=0.$$

这个关于 t 的二次方程有正根，其正根为

$$t=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{94}}{220}x.$$

为使缉私船在 15 分钟内截住走私船，x 必须满足

$$\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{94}}{220}x\leqslant 0.25,$$

$$x\leqslant\frac{220\times 0.25}{5\sqrt{2}+\sqrt{94}}\approx 3.28.$$

因此，当发现走私船时，只要两船之间距离不超过 3.28 海里，我缉私船就能在 15 分钟内截住走私船.

例 3 如图 8-13，池塘两侧有两建筑物 A，B，不能直接量得它们之间的距离. 在池塘边选取 C，D 两点，并测得 $\angle ACB=75^\circ$，$\angle BCD=45^\circ$，$\angle ADC=30^\circ$，$\angle ADB=90^\circ$，$CD=80$ 米，试求 A，B 两建筑物间的距离（精确到 0.1 米）.

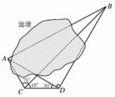


图 8-13

分析 可以将 AB 看成是 $\text{Rt}\triangle ADB$ 的斜边，因此在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中，知道两直角边或一直角边和一锐角，就能计算出 AB 的长.

分析过程图：

求 AB $\xleftarrow{\text{在 Rt}\triangle ABD\text{ 中}}$ AD，BD.

求 AD $\xleftarrow{\text{在}\triangle ACD\text{ 中}}$ CD，$\angle ACD$，$\angle CAD$.

求 BD $\xleftarrow{\text{在}\triangle BCD\text{ 中}}$ CD，$\angle BCD$，$\angle CBD$.

解 在 $\triangle ACD$ 中，$\angle ACD=75^\circ+45^\circ=120^\circ$，$\angle CAD=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$，$CD=80$.

由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin 30^\circ}=\dfrac{AD}{\sin 120^\circ}$,

∴ $AD=80\sqrt{3}$.

在$\triangle BCD$中，$\angle BCD=45^\circ$，$\angle BDC=120^\circ$，$\angle CBD=180^\circ-(45^\circ+120^\circ)=15^\circ$.

同样由正弦定理得

$$\frac{BD}{\sin 45^\circ}=\frac{CD}{\sin 15^\circ}.$$

∴ $$BD=80\cdot\frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}.$$

∵ $$\begin{aligned}\sin 15^\circ&=\sin(45^\circ-30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

∴ $BD=80(\sqrt{3}+1)$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ADB$中，

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{AD^2+BD^2}=80\sqrt{7+2\sqrt{3}}\\&\approx 80\cdot\sqrt{10.464}\approx 80\times 3.235=258.8(\mathrm{m}).\end{aligned}$$

答：A，B两建筑物间的距离约为258.8 m.

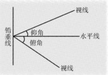


图 8-14

如图8-14，当我们进行测量时，在视线与水平线所成的角中，视线在水平线上方的角叫作仰角(angle of elevation)，视线在水平线下方的角叫作俯角(angle of depression).

例4 如图8-15，海岛O上有一座海拔1 000 m的山，在山顶上的一个观察站A，上午11时测得一游轮在岛正东方向的C处，俯角为30°，11时6分又测得该游轮在岛的北偏西30°的B处，俯角为30°. 如果该游轮做匀速直线运动，试求该游轮的速度.

解 如图8-15，由题意得$\angle OAC=60^\circ$，$\angle OAB=60^\circ$，$\angle BOC=90^\circ+30^\circ=120^\circ$.

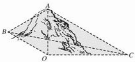


图 8-15

在$\triangle ACO$中，

$$OC=1\ 000\tan 60^\circ=1\ 000\sqrt{3},$$

在$\triangle BAO$中，

$$OB=1\ 000\tan 60^\circ=1\ 000\sqrt{3},$$

在$\triangle OBC$中，

$$\begin{aligned}BC^2&=OC^2+OB^2-2OC\cdot OB\cdot\cos\angle BOC\\&=(1\ 000\sqrt{3})^2+(1\ 000\sqrt{3})^2-2\times 1\ 000\sqrt{3}\times 1\ 000\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=(3\ 000)^2,\end{aligned}$$

$\therefore$ $$BC=3\ 000.$$

因此，该游轮的速度 $v=\dfrac{3\ 000}{\frac{6}{60}}=30\ 000(\text{m/h})=30(\text{km/h})$.

答：该游轮的速度为 30 km/h.

应用解三角形知识解实际问题的解题步骤：

(1) 准确理解题意，尤其要理解应用题中的有关名词、术语所表示的量；

(2) 根据题意作出示意图；

(3) 确定实际问题所涉及的三角形，并搞清该三角形的已知元素与未知元素；

(4) 选用正弦定理、余弦定理进行求解；

(5) 给出答案.

上述过程可简化为：

练习

1. 甲船在点 A 发现乙船在北偏东 60° 的 B 处，乙船以 a 海里/时的速度向正北方向行驶．已知甲船的速度是$\sqrt{3}a$ 海里/时，问甲船应沿着什么方向前进，才能最快与乙船相遇？
2. 在一幢 20 m 高的房屋顶测得对面一塔顶的仰角为 60°，塔基的俯角为 45°，假定房屋与塔建在同一水平地面上，求塔的高度．
3. 如图 8-16 所示，某直升机于空中 A 处观测正前方地平面控制点 C 的俯角为 30°；若航向不变，飞机继续飞行 1 000 m 至 B 处，观测地面控制点 C 的俯角为 45°，问飞机再向前飞行多远，与地面控制点 C 的距离最近（结果保留根号）？

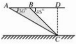


图 8-16

习题 3

学而时习之

1. 我舰在某岛 A 南偏西 45°且与 A 相距 10 海里的 B 处，发现走私舰正由 A 岛向北偏西 75°的方向以 30 海里/时的速度航行．如我舰恰好用 10 分钟追上走私舰，求我舰航行的速度和方向．
2. 如图 8-17，海中小岛 A 周围 20 海里内有暗礁，船向正南方向航行，在 B 处测得小岛 A 位于该船的南偏东 30°方向上，航行 30 海里后，在 C 处测得小岛 A 位

于该船的南偏东60°方向上，如果此船不改变航向，继续向正南航行，有无触礁的危险？

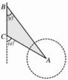


图 8-17

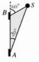


图 8-18

3. 如图 8-18，一艘船以 32.2 海里/时的速度向正北航行，在 A 处看灯塔 S 在船的北偏东 20°，30 分钟后航行到 B 处，在 B 处看灯塔 S 在船的北偏东 60°方向上，求灯塔 S 和 B 处的距离（精确到 0.1 海里）.
4. 如图 8-19，两建筑物的水平距离为 24 m，从 A 点测得 D 点的俯角 α 为 30°，测得 C 点的俯角 β 为 60°，求这两座建筑物的高（结果可保留根号）.

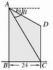


图 8-19

温故而知新

5. 如图 8-20，在平面镜 CD 同侧，有相隔 15 dm 的两点 A，B，它们到平面镜的距离分别是 5 dm 和 7 dm，现要使从 A 点射出的光线经平面镜反射后经过点 B，求光线的入射角 θ 的度数（精确到 1′）.
6. 在湖面上高 h 米处，测得云的仰角为 α，而湖中云之影（即云在湖中的像）的俯角为 β，试证：云高为 $h\cdot\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$（米）.

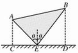


图 8-20

实习作业

如何测量建筑物的高

下面我们利用解斜三角形的知识，来研究如何测量教学楼或校内其他建筑物的高.

图 8-21

实 习 报 告

<table>
<tr><td>题　目</td><td colspan="5">测量教学楼高</td></tr>
<tr><td>测量目标
简　图</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>测量工具</td><td colspan="5">测角仪、皮尺</td></tr>
<tr><td>测量方案</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>计算原理
与过程</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td rowspan="4">测量数据</td><td>测量项目</td><td>第一次</td><td>第二次</td><td>第三次</td><td>平均值</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>楼高数据</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>本方案优点</td><td colspan="2"></td><td>本方案不足</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>其他方案</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>指导教师意见</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>

阅读与思考

面积与三角公式

本章一开始就得出了$\triangle ABC$的面积公式$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$，并由此推出了三角形的正弦定理.

面积是一个具有广泛应用的概念，中国古代就是通过面积巧妙地证明了勾股定理. 我们下面去发现面积概念的另一个应用——利用上述三角形的面积公式巧妙地证明一些三角公式.

由于需要构造三角形，所涉及的角的大小必须受到限制，因此，下面提到的角都是锐角.

1. 正弦的诱导公式

(1) 如图 8-22，平行四边形$ABCD$中，$\angle DAC=90°$，$\angle CAB=\alpha$. 记$AB=c$，$BC=AD=a$，$AC=b$. 由于

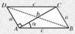


图 8-22

$$S_{\square ABCD}=2S_{\triangle DAB}=ac\sin(90°+\alpha)$$
$$=2S_{\triangle CAB}=bc\sin\alpha,$$

于是，$\sin(90°+\alpha)=\frac{b}{a}\sin\alpha=\frac{b}{c}=\cos\alpha$，

即　$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$.

(2) 如图 8-23，$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中，$\angle C=90°$，B是CD的中点，$\angle ABC=\alpha$. 记$AB=c$，$CB=BD=a$. 由于$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}$，

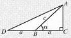


图 8-23

$\therefore$　$\frac{1}{2}ac\sin(180°-\alpha)=\frac{1}{2}ac\sin\alpha$，

即　$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$.

2. 正弦的和角公式

如图 8-24，AD 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高，$\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$. 记 $AB=c$，$AC=b$，$AD=h$.

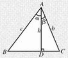


图 8-24

由于 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，

$$\frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}hc\sin\alpha+\frac{1}{2}hb\sin\beta,$$

得 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{h}{b}\sin\alpha+\frac{h}{c}\sin\beta$.

但 $\frac{h}{b}=\cos\beta$，$\frac{h}{c}=\cos\alpha$，

∴ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

3. 正弦的和差化积公式

如图 8-25，在等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=b$，$\angle BAE=\alpha$，$\angle CAE=\beta$，不妨设 $\alpha>\beta$，D 是 BC 的中点，$AD\perp BC$. 记 $AD=h$，$AE=d$.

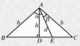


图 8-25

∵ $S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABD}$，

∴ $\frac{1}{2}bd\sin\alpha+\frac{1}{2}bd\sin\beta=bh\sin\angle BAD$.

又∵ $\angle BAD=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$，

∴ $\sin\alpha+\sin\beta=2\frac{h}{d}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

∵ $\frac{h}{d}=\cos\angle DAE$，

而 $\angle DAE=\angle BAE-\angle BAD=\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}$，

∴ $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

三角形的面积具有如此奇妙的应用，真是令人兴奋！你还能利用三角形的面积公式推导出一些其他的三角公式吗？

小结与复习

一、指导思想

通过对任意三角形边角关系的探究，让学生发现并掌握三角形中的边长和角度之间的数量关系，并认识到运用它们可以解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

二、内容提要

本章的主要内容有正弦定理、余弦定理、解斜三角形的四种情况以及解斜三角形的应用. 解三角形在中学数学中被广泛应用，它是由三角形中已知的边和角（至少包括一条边）的大小，求出其余边和角的大小的理论，是从数量角度进一步认识三角形中各元素间关系的依据，也能培养我们分析问题、解决问题的能力.

本章的重点是斜三角形的解法，必须逐步熟练掌握并能正确运用.

本章的难点是余弦、正弦定理的实际运用，以及“已知两边和其中一边的对角解斜三角形”的问题.

解斜三角形有四种类型：

1. 已知两角 A，B 及边 a，由内角和公式求角 C，再由正弦定理求出 b，c（唯一解）.

2. 已知两边 b，c 与其夹角 A，由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，求出 a，再由余弦定理求出角 B，C（唯一解）.

3. 已知三边 a，b，c，由余弦定理可求出角 A，B，C（唯一解）.

4. 已知两边 a，b 及角 A，由正弦定理求角 B，由内角和公式求角 C.

三、学习要求及需要注意的问题

1. 学习要求.

(1) 掌握余弦定理、正弦定理及其推导过程，并能运用它们解斜三角形.

(2) 通过解斜三角形，了解解斜三角形在实际测绘问题中的广泛应用，培养我们把实际问题转化为数学问题，并利用已有知识加以解决的能力，从而提高我们分析问题和解决问题的水平.

2. 需要注意的问题.

将某些实际问题转化为解三角形问题，是常遇到的应用问题. 解这类问题，关键是如何将实际问题转化为数学问题. 画出示意图，这有助于将抽象问题具体化、形象化，通常总是将实际问题中的长度、角度看作三角形的边和角，从而构建三角形，创造应用解三角形知识的背景，进而运用有关知识去解决问题. 解这类问题时还要注意近似计算的要求.

四、参考例题

例1 货轮在海上以 40 海里/时的速度沿着南偏东 40°的方向航行，货轮在 B 点观测灯塔 A 在其南偏东 70°的方向上，航行半小时到达 C 点，观测灯塔 A 在其北偏东 65°的方向上，求货轮到达 C 点时与灯塔 A 的距离是多少?

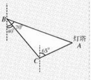


图 8-26

分析 根据题意，画出图形（图 8-26）. 在$\triangle ABC$中，线段 BC 是半小时路程，只要根据所给方向角的数据，求出$\angle ABC$，$\angle A$ 的大小，由正弦定理可得出 AC 的长.

解 在$\triangle ABC$中，$BC=40\times\frac{1}{2}=20$，

$$\angle ABC=70^\circ-40^\circ=30^\circ,$$

$\angle ACB=40°+65°=105°$,

∴ $\angle A=180°-(30°+105°)=45°$.

由正弦定理，得 $AC=\dfrac{BC\sin\angle ABC}{\sin A}=\dfrac{20\sin 30°}{\sin 45°}=10\sqrt{2}$.

答：货轮到达 C 点时 CA 的距离是 $10\sqrt{2}$ 海里.

例 2 如图 8-27 所示，有两条交点是 O 且相交成 60°角的直路

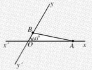


图 8-27

xx'，yy'. 甲、乙分别在射线 Ox，Oy 上，起初甲离 O 点 3 km，乙离 O 点1 km，后来两人同时以 4 km/h 的速度，甲沿 $\overrightarrow{xx'}$ 的方向，乙沿 $\overrightarrow{y'y}$ 的方向步行.

(1) 起初，两人相距多远？

(2) 用含有 t 的式子表示 t 小时后两人之间的距离；

(3) 什么时候两人相距最近？

分析 本题是已知两边及其夹角求第三边的简单应用问题.

解 (1) 设甲、乙两人最初的位置是 A，B，

则 $AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos 60°$

$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\dfrac{1}{2}=7.$

∴ $AB=\sqrt{7}$ (km).

(2) 设甲、乙两人 t 小时后的位置分别是 P，Q，则 $AP=4t$，$BQ=4t$，

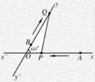


图 8-28

当点 P 在点 O 的右侧或 O 点，即 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时，如图 8-28 所示，

$PQ^2=(3-4t)^2+(1+4t)^2-$

$2(3-4t)(1+4t)\cos 60°$.

当点 P 在点 O 的左侧，即 $t>\frac{3}{4}$ 时，如图 8-29 所示，

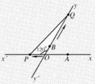


图 8-29

$PQ^2=(4t-3)^2+(1+4t)^2-2(4t-3)(1+4t)\cos 120°$.

注意到，上面两式实际上是统一的，所以 $PQ^2=48t^2-24t+7$，

即 $PQ=\sqrt{48t^2-24t+7}$.

(3) $PQ^2=48\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+4$，

∴ $t=\frac{1}{4}$ h，即在第 15 分钟时，PQ 最短，最短距离是2 km.

复习题八

学而时习之

1. 在△ABC 中

(1) 已知 $a=11$，$A=80°$，$B=50°$，求 c；

(2) 已知 $a=1$，$c=\sqrt{3}$，$A=30°$，求 b；

(3) 已知 $b=9$，$c=10$，$A=20°$，求 a；

(4) 已知 $a=7$，$b=5$，$c=9$，求 A.

2. 在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=10\sqrt{3}$，$AC=30$，$B=60^\circ$，求此平行四边形的面积.

3. 在$\triangle ABC$中，已知 $a=\sqrt{17}$，$b=\sqrt{13}$，面积 $S=5$，求 c.

4. 如图 8-30，两条笔直的公路相交成 60°角，两辆汽车 A 和 B 同时从角的顶点出发，分别沿两条公路行驶. 如果汽车 A 的速度是 48 km/h，那么汽车 B 应以多大的速度行驶，才能使这两辆汽车在出发 1 小时后相距 43 km.

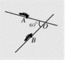


图 8-30

温故而知新

5. 某船在海面 A 处测得灯塔 C 与 A 相距$10\sqrt{3}$海里，且在北偏东 30°方向；测得灯塔 B 与 A 相距 $15\sqrt{6}$海里，且在北偏西 75°方向. 船由 A 向正北方向航行到 D 处，测得灯塔 B 在南偏西 60°方向. 这时灯塔 C 与 D 处相距多少海里？C 在 D 的什么方向？

6. 一巡逻艇在 A 处发现北偏东 45°相距 9 海里的 C 处有一艘走私船，正沿南偏东 75°的方向以 30 海里/时的速度向我海岸行驶，巡逻艇立即以 42 海里/时的速度沿着直线追去，问巡逻艇应该沿什么方向去追？需要多少时间才能追赶上该走私船？

7. 如图 8-31，一航船在 A 处观测到北偏东 45°方向上有一灯塔 B，航船向正东方向以 20 海里/时的速度航行 1.5 小时后到达 C 处，又观测到灯塔 B 在北偏东 15°方向上，求此时航船与灯塔相距多少海里（结果保留根号）？

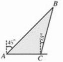


图 8-31

8. 海中有一个小岛，岛的四周 15 海里内有暗礁，为了防止船触礁，岛上装有灯塔作标志，今有一货轮由东向西航行，开始看岛上灯塔在北 62°西，行 30 海里后，见此岛灯塔在北 32°西，如果货轮继续朝正西方向航行，问有无触礁危险？

9. 甲地气象台在某时测得台风中心在甲地的南偏东 79°方向的 1 171 km 处，经过 24 h 后，测得台风中心在甲地南偏东 73°方向的 543 km 处，假设台风中心沿直线运动，求台风中心移动的平均速度.

上下而求索

10. 如图 8-32，在某海岛上一观察哨 A 处，中午 12 时测得一轮船在海岛北偏东 60° 的 C 处，12 时 20 分时测得该轮船在海岛北偏西 60° 的 B 处，12 时 25 分该轮船到达位于海岛正西方且距海岛 5 海里的 E 港口，如果轮船始终匀速直线前进，问船速多少？

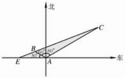
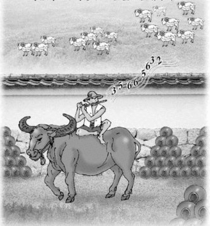


图 8-32

第9章 数列

玉兔子孙世代传， 棋盘麦塔上摩天.
坛坛罐罐求堆垛， 步步为营算连环.
数列寻根属函数， 自成一格意盎然.
等差等比初学步， 登堂入室看来年.



按照某种规则排好的一列数叫作数列. 本章将呈现产生数列的方式，讨论数列的性质，研究两类最简单的数列——等差数列和等比数列，并探求数列在数学建模和解决实际问题中的应用.

问题探索

从兔子问题引出的斐波拉契数列

数学家斐波拉契(L. Fibonacci, 1170—1240).

公元 1202 年，商人出身的意大利数学家斐波拉契提出了一个有趣的兔子问题："假定一对刚出生的小兔子一个月后能长成大兔子，再过一个月后就能生出一对小兔子，并且以后每个月都生一对小兔子. 设所生小兔子都是一雌一雄，均无死亡. 问一对刚出生的兔子一年后可繁殖多少对兔子?"

我们先把前几个月的情况列出来：

第 1 个月只有一对刚出生的兔子，$F_1=1$；

第 2 个月时，第一对兔子怀孕但未生出小兔子，所以还是只有一对兔子，$F_2=1$；

第 3 个月时，第一对兔子生出了一对小兔子，所以这时一共有两对兔子，$F_3=2$；

第 4 个月时，第一对兔子又生一对小兔子，而第二对兔子正在怀孕，这时有 3 对兔子，$F_4=3$；

第 5 个月时，第一对兔子和第二对兔子都又生了小兔子，所以这时共有 5 对兔子，$F_5=5$；

照上述关系递推下去，不难算出，$F_{12}=144$. 就是说，一年过去以后，一对兔子会变成 144 对兔子. 我们用"○"表示一对幼兔，用"●"表示正怀孕的大兔. 那么图 9-1 就表示出了兔子递增的情况. 把数字列出来就形成一个数列：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，…

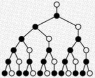


图 9-1　兔子繁殖中的数学

这个数列就是著名的斐波拉契数列（fibonacci sequence）.

斐波拉契数列的特点是：从第3项起，每一项都是前两项的和，而且前一项与后一项的比值，逐渐趋向黄金数，也就是说，越往后的各项，此比值越接近0.618，所以这个数列也称为黄金数列（golden sequence）.

黄金数列与自然界中许多有趣的现象相关．例如，雄蜂家系数目的分布就符合斐波拉契数列．因为一般动物都有父母，而雄蜂却例外，它只有母亲（即蜂后）而没有父亲．蜂后产的卵，若能受精，则孵化出雌蜂，未来成为工蜂或蜂后；若不能受精则孵化为雄蜂．这样，雄蜂就有母无父，而雌蜂则有父有母．如果从一只雄蜂开始，往上追溯它的祖先，那么第 n 代祖先的数目刚好就是黄金数列第 n 项 F_n，如图9-2所示．

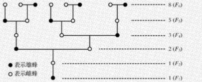


图9-2　雄蜂世系图

在自然界美丽的花朵中，许多花瓣的数目也符合斐波拉契数列．我们常见的花瓣数目是3，5，8，13，21，34，…有一位学者曾耐心地数过一朵重瓣的芍药花，发现它有233个花瓣，与 $F_{13}=233$ 的数目一致．另一位学者数了另一朵花，却是157瓣．但他发现其中13瓣与其他144瓣有显著差异，是特别长而且向内卷曲的．这种情况表明这朵花的花瓣数目是由 $F_7=13$ 和 $F_{12}=144$ 合成的．

生活中的许多情况也与斐波拉契数列相符．例如上台阶的方式就是如此．只有一个台阶时，只有一种走法，$F_1=1$；

两个台阶走法有2种，一阶一阶上或一步上两个台阶，所以 $F_2=2$；

3个台阶时，走法有1—1—1，2—1，1—2，共3种不同方法，因此 $F_3=3$；

4个台阶时，走法可以是1—1—1—1，1—1—2，1—2—1，2—1—1，2—2，共5种走法，故 $F_4=5$；

……

算下去的结果得到一个数列：

1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987，…

这与斐波拉契数列是十分相似的.

与斐波拉契数列情况接近的实际例子在自然界和生活中数不胜数. 为推动此项研究，集中有关的文献，1963年，在霍加特博士倡议下成立了斐波拉契协会，创办了《斐波拉契季刊》. 刊物创办的前3年就发表了近1 000页有关的研究成果. 直到现在，科学家和业余数学爱好者们对黄金数列的研究热情仍不减当年.

9.1 数列的概念

在问题探索中，兔子出生数按月依次排列为：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，…

如图 9-3，在超市的货架上堆放罐头，最顶上一层有 2 个罐头，其余每一层的罐头数都比它上面一层的罐头数多 2 个，共堆了 8 层，从上到下每层的罐头数依次为：

2，4，6，8，10，12，14，16；

图 9-3

我国从 1989 年到 2002 年的国内生产总值依次为（单位：亿元）：

16 909.2，18 547.9，21 617.8，26 638.1，34 634.4，

46 759.4，58 478.1，67 884.6，74 772.4，79 553，

82 054，　89 404，　95 933，　102 398.

把这三个例子的共同特征抽象出来便得到了数列的概念：

数列是一个抽象概念，它应用的广泛性恰在于它的抽象性.

按某种规则依次排列的一列数叫作数列（sequence），数列中的每一个数叫作数列的项（term of sequence），排在第 1 位的数叫作数列的首项（leading term）或叫作数列的第 1 项，排在第 2 位的数叫作数列的第 2 项，依次类推，排在第 n 位的数叫作数列的第 n 项（n-th term）…

数列通常写成 a_1，a_2，…，a_n，…，其中 a_n 表示数列的第 n 项.

数列也可以简记为 $\{a_n\}$，项数有限的数列称为有穷数列（finite sequence），项数无限的数列称为无穷数列（infinite sequence）.

例 1　数 π 的所有不足近似值按从小到大依次排列得到一个数

列，试写出它的前 7 项，并判断此数列是有穷数列还是无穷数列？

解 数 π 的不足近似值的前 7 项分别为

3，3.1，3.14，3.141，3.141 5，3.141 59，3.141 592.

由于它的每一项都不是无理数，而数 π 是无理数，它的不足近似值可以无限地写下去，所以这个数列是无穷数列.

它的首项是 3，第 2 项是 3.1，第 7 项是 3.141 592，对于这个数列的每个具体的项，不管是第 1 000 项，第 10 000 项，甚至第 100 000 项，利用计算机，总可以算出相应的数值，但是，对于这个数列的一般项 a_n，迄今为止尚没有人能用关于 n 的某个式子来表示.

例 2 某家庭记录 2002 年内每月的用电量如下：

月份	1	2	3	4	5	6
用电量（kW・h）	110	120	90	80	62	80
月份	7	8	9	10	11	12
用电量（kW・h）	103	115	84	65	81	95

用电量按月份排列得到一个 12 项的数列，试写出该数列的最大项，最小项；首项，末项；并以月份作为横坐标，用电量作为纵坐标，在直角坐标系中描述该家庭这一年中每月的用电情况.

解 每一个月的用电量依次记为 a_1，a_2，…，a_{12}，最大项为 $a_2=120$，最小项 $a_5=62$，首项 $a_1=110$，末项 $a_{12}=95$（如图 9-4）.

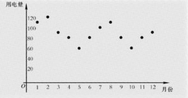


图 9-4

在直角坐标系中，数列的图象是一族离散的点.

从图上清楚地看到，这个家庭哪个月用电量最多，哪个月用电量最少；哪些月用电量在增加，哪些月用电量在减少，用电量随月份的变化也一目了然.

当月份给定时，月用电量也就唯一确定.

喜欢动脑筋的同学通过例 2 马上会发现一个问题，数列不就是一种函数吗？

是的，数列就是一种函数，只不过是定义在正整数集 $\mathbf{N}^*$（或其有限子集）上的函数，如果已知定义在正整数集上的函数 $f(n)$，那么 $\{f(n)\}$ 就是一个数列；另一方面，如果已知数列 $\{a_n\}$，那么，我们把表示位置的量看作自变量，数列的项就可看作"位置"的函数值，$a_n=f(n)$ 就是一个定义在正整数集（或其有限子集）上的函数，因此，数列的概念和定义在正整数集（或其有限子集）上的函数的概念确实是同一个概念.

数列是一种特殊的函数，因此，可以应用函数的一些性质解决数列问题.

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 可以用关于 n 的一个公式表示，那么这个公式就称为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式（general term formula）.

从函数的观点看，数列的通项公式就是函数的解析表达式.

例 3 根据数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出数列的前 3 项及第 $n+1$ 项.

(1) $a_n=\dfrac{n-2}{n+1}$;　　　　(2) $a_n=4+4\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$.

解 (1) 在通项公式中依次取 $n=1, 2, 3$，得到数列的前 3 项分别为 $-\dfrac{1}{2}$，0，$\dfrac{1}{4}$；通项公式 a_n 中的 n 用 $n+1$ 来代替，得到数列的第 $n+1$ 项是 $\dfrac{n-1}{n+2}$.

求数列的具体项就是求函数值.

(2) 同 (1) 一样，依次取 $n=1, 2, 3$，得到数列的前 3 项分别为 1，$\dfrac{25}{4}$，$\dfrac{37}{16}$；通项公式 a_n 中的 n 用 $n+1$ 来代替，得到数列的第 $n+1$ 项是 $4+4\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$.

练　习

1. 根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$;　　　　(2) $a_n=(-1)^n$;

(3) $a_n=n^2-1$;　　　　(4) $a_n=|2n-5|$.

2. 根据下列数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的第 10 项、第 2 003 项与第 $4n$ 项：

(1)$a_n=(-1)^n n$；　　(2) $a_n=n-\sin\frac{n\pi}{2}$.

3. 已知无穷数列 0，3，8，…，n^2-1，…

(1) 求这个数列的第 9 项；

(2) 99 是不是这个数列中的项？如果是，是第几项？

例 4　已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=|3n-19|$，求数列$\{a_n\}$的最小项.

解　$a_n=\begin{cases}19-3n, & (n\leqslant 6),\\ 3n-19, & (n\geqslant 7).\end{cases}$　数列$\{a_n\}$具有性质 $a_1>a_2>\cdots>a_6$，而 $a_7<a_8<a_9<\cdots$. 由于 $a_6=1$，$a_7=2$，所以数列$\{a_n\}$的第 6 项最小，最小项为 1.

若 $a_n<a_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则数列$\{a_n\}$叫作单调递增数列；若 $a_n>a_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则数列$\{a_n\}$叫作单调递减数列.

例 4 表明数列的通项公式在讨论数列的性质时起着至关重要的作用，因此，寻找已知数列的通项公式成为数列中十分重要的一个问题.

数列的前面几项，有可能揭示出该数列的某种规律，我们根据这些规律有可能写出该数列的一个通项公式.

例 5　如图 9-5，根据图形及相应的点数，写出点数所成数列的一个通项公式.

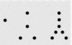


图 9-5

解　前 3 个图形的点数分别为 1，4 和 7，通过对这 3 个图形的观察，发现第 4 个图形应当如图 9-6，相应的点数是 10. 总结这些图形变化呈现的规律，发现第 n 个图形的垂直方向恰是 n 个点，两侧分别是 $n-1$ 个点，相应的点数是 $n+2(n-1)=3n-2$，因此，第 n 个图形的点数 a_n 满足 $a_n=3n-2$.

图 9-6

例 6　写出下面数列的一个通项公式：

(1) 1，-1，1，-1，1，…

(2) 1，4，9，16，25，…

(3) $\frac{2^2-1}{2}$, $\frac{3^2+1}{3}$, $\frac{4^2-1}{4}$, $\frac{5^2+1}{5}$, …

解 (1) 数列中正负号交替出现，当 n 是奇数时，第 n 项为正；当 n 是偶数时，第 n 项为负．由此发现，数列的第 n 项可以是 $(-1)^{n+1}$，因此，数列的一个通项公式是 $a_n=(-1)^{n+1}$．

(2) 数列的前5项分别可改写为 1^2，2^2，3^2，4^2 和 5^2，根据这个规律，数列的第 n 项可以是 n^2，因此，数列的一个通项公式是 $a_n=n^2$．

(3) 这个数列的前4项的分母都是序号加1，奇数项的分子是分母的平方减1，偶数项的分子是分母的平方加1，由此规律，这个数列的第 n 项可以是 $\frac{(n+1)^2+(-1)^n}{n+1}$，因此，这个数列的一个通项公式是 $a_n=\frac{(n+1)^2+(-1)^n}{n+1}$．

通过数列的有限项去写数列的通项公式往往不只一个，我们只需要写出其中一个即可．

练 习

1. 说出下列数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) 1，3，5，7； (2) 2，4，6，8；

(3) 1，−4，9，−16； (4) $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$．

2. 观察下列数列的变化规律，用适当的数填空，并写出每个数列的一个通项公式：

(1) ( )，2，−3，4，−5，( )，−7，…

(2) 2，4，8，16，( )，64，…

(3) 1，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{3}$，( )，$\frac{1}{4}$，…

我们可以通过数列$\{a_n\}$的通项公式，得到数列$\{a_n\}$相邻两项的关系，反过来，能否从数列相邻两项的关系中，得到数列的通项公式呢？

例7 某种细菌在实验室的培养过程中，每1小时分裂一次(一个分裂为两个)，经过12小时，这种细菌由1个可繁殖成多少个？

解 设经过 n 小时，这种细菌由1个可繁殖成 a_n 个，细菌的个数形成一个数列 $\{a_n\}$，由题意，细菌每小时分裂一次，得 $a_{n+1}=2a_n$ $(n\geqslant 1)$．由 $a_1=1$，根据 $a_{n+1}=2a_n$ 得 $a_2=2$，依此类推，$a_3=2^2$，…，$a_{12}=2^{11}=2\ 048$，于是经过12小时，这种细菌由1个可繁殖成2 048个．

如果数列 $\{a_n\}$ 的任一项 a_{n+1} 与它的前一项 a_n 之间的关系可用一个公式来表示，即 $a_{n+1}=f(a_n)$，$n\geqslant 1$，那么这个公式就叫作数列 $\{a_n\}$ 的递推公式(recursive formula)；a_1 称为数列 $\{a_n\}$ 的初始条件(initial condition)．由递推公式和初始条件可确定数列 $\{a_n\}$，这是给定数列的又一种重要方法，许多同数列有关的应用问题最后都归结为这种数学模型，而且这种方法便于计算机编程进行计算．

例8 根据递推公式和初始条件

$$\begin{cases}a_{n+1}=2a_n+1,\ (n\geqslant 1),\\ a_1=1.\end{cases} \qquad ①$$

写出数列 $\{a_n\}$ 的前5项．

解 反复利用递推公式很容易填表：

n	1	2	3	4	5	…
a_n	1	3	7	15	31	…

于是，数列 $\{a_n\}$ 的前5项是1，3，7，15，31．

①式为古印度有名的河内塔问题．

在计算机中，由递推公式和初始条件确定的数列可由反馈过程实现．输入 a_n 后，计算机一方面输出 $a_{n+1}=f(a_n)$，另一方面，把 a_{n+1} 反馈回输入端．因此，只要输入 a_1，计算机将自动按顺序输出数列 $\{a_n\}$ 的每一项．

练 习

1. 写出下列数列的前5项：

(1) $a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+2$，$(n\geqslant 2)$；

(2) $a_1=1$，$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$，$(n\geqslant 2)$；

(3) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-1$．

2. 若数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=2^n$，试求 a_n 与 a_{n-1}（$n\geqslant 2$）的递推关系.

习题 1

学而时习之

1. 利用计算器，写出

(1) $\sqrt{3}$的所有不足近似值按从小到大依次排列所得数列的前 5 项；

(2) $\sqrt{3}$的所有过剩近似值按从大到小依次排列所得数列的前 5 项.

2. 写出区间［100，200］内能被 6 整除的整数按从小到大的顺序排列所得数列的前 3 项.

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n-1$，

(1) 写出它的前 4 项；

(2) 求第 $n+1$ 项及第 $2n$ 项；

(3) 当 $n\geqslant 2$ 时，计算：a_n-a_{n-1}.

4. 根据通项公式 $a_n=2(1+3n)$，填写下表：

n	1	2	3	…	11	…		…	
a_n							128		602

5. 观察下面数列的变化规律，用适当的数填空，并写出每个数列的一个通项公式.

(1)（ ），3，9，（ ），81，243，…

(2) -1，$\frac{1}{2}$，（ ），$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，（ ），…

(3) 1，$\sqrt{2}$，（ ），2，$\sqrt{5}$，（ ），$\sqrt{7}$，…

6. 观察下面数列的变化规律，写出每个数列的第 10 项.

(1) $-\frac{1}{2\times 1}$，$\frac{1}{2\times 2}$，$-\frac{1}{2\times 3}$，$\frac{1}{2\times 4}$，…

(2) $-\frac{1}{3\times 5}$，$\frac{1}{5\times 7}$，$-\frac{1}{7\times 9}$，$\frac{1}{9\times 11}$，…

(3) $\frac{2}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}$，…

(4) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{3}{4}$, $4\frac{4}{5}$, …

温故而知新

7. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=\frac{\cos n\pi}{2}$，写出它的前 4 项及第$2n$项.

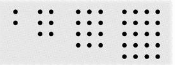
8. 已知无穷数列 1×2，2×3，3×4，…，$n(n+1)$，…

(1) 求这个数列的第 10 项和第 31 项；

(2) 420 是不是这个数列中的项？如果是，是第几项？

(3) 证明：60 不是这个数列中的项.

9. 根据下面的图 9-7 及相应的点数，写出点数所成数列的通项公式.



(1)　(2)　(3)　(4)

图 9-7

10. 写出下面每个数列的前 5 项.

(1) $\begin{cases}a_{n+1}=3a_n+2,\\ a_1=1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n,\\ a_1=3.\end{cases}$

11. 一列火车从 A 城驶往 B 城，铁路上设有 10 个车站（包括起点站 A 和终点站 B）. 火车上附有一节邮政车厢，每停靠一站都要卸下前面各站发往该站的邮袋各一个，同时又装上该站发往后面各站的邮袋各一个，设从第 n 站出发时，邮政车厢内的邮袋数为 a_n 个，$1\leqslant n\leqslant10$，写出 $\{a_n\}$ 的前 4 项.

12. 某人于年初在银行存入一年期定期储蓄 2 万元，到期后把本息续存一年期定期储蓄，以后每次到期后都按上述方式续存，设银行一年期定期储蓄的年利率为 2.52%，且储户每次在取得利息时应支付利息的 20%作为利息税，设该储户存满 n 年后所能得到的本利为 a_n 万元. 试写出$\{a_n\}$的前 3 项.

9.2 等差数列

某住宅小区的绿化建设有如下统计数据：

年 份	1999	2000	2001	2002
绿化覆盖率（%）	7.0	7.8	8.6	9.4

从2000年起，每一年的绿化覆盖率与上一年的绿化覆盖率有何关系？根据这一发展趋势，2003年的绿化覆盖率应为多少？若将1999年的绿化覆盖率记为 a_1，2000年的绿化覆盖率记为 a_2，依次类推，得到数列 $\{a_n\}$，则当 $n\geqslant 2$ 时，a_n 与 a_{n-1} 有何关系？

我们不难得到：从2000年起，每一年的绿化覆盖率与比上一年的绿化覆盖率多0.8；2003年的绿化覆盖率应为10.2；当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=0.8$.

一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项之差都等于同一个常数，那么这样的数列称为等差数列（arithmetic progression），这个常数叫作数列的公差（common difference），公差通常用字母 d 表示.

常数列是公差为0的等差数列.

于是，如果当 $n\geqslant 2$ 时，均有 $a_n-a_{n-1}=d$，那么，数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

例1 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

(1) 如果 $a_1=5$，$a_2=2$，求公差 d 和 a_3；

(2) 如果 $a_3=5$，$a_2=2$，求公差 d 和 a_1.

解 由等差数列的定义，可知

(1) 公差 $d=a_2-a_1=-3$，$a_3=a_2+d=-1$.

(2) 公差 $d=a_3-a_2=3$，$a_1=a_2-d=-1$.

a 与 c 的等差中项为 $\frac{a+c}{2}$.

例2 如果 $b=\dfrac{a+c}{2}$，那么数 b 称为 a 和 c 的等差中项.

试证：a，b，c 成等差数列当且仅当 b 是 a 和 c 的等差中项.

证明 如果 a，b，c 成等差数列，由等差数列的定义得 $b-a=c$

$-b$，那么 $2b=a+c$，即 $b=\frac{a+c}{2}$，所以 b 是 a 和 c 的等差中项.

反过来，如果 b 是 a 和 c 的等差中项，那么 $b=\frac{a+c}{2}$，推出 $2b=a+c$，即 $b-a=c-b$，由等差数列的定义知，a,b,c 成等差数列.

利用定义证明.

由上例可知，若 a，b，c 成等差数列，则可设这三个数分别为 $b-d$，b，$b+d$.

例 3 求证：若△ABC 的三个内角的度数可以构成等差数列，则△ABC 中一定有一个内角为 60°.

证明 ∵ △ABC 的三个内角的度数可以构成等差数列，

∴ 可以设△ABC 的三个内角的度数分别为 $x-d$，x 和 $x+d$.

由于三角形的三个内角度数之和为 180°，

∴ $(x-d)+x+(x+d)=180°$，$x=60°$.

∴ △ABC 中必有一个内角为 60°.

想一想：逆命题是否成立？并请说明理由.

例 4 已知数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，p 是常数，设数列$\{b_n\}$满足 $b_n=pa_n$.

求证：数列$\{b_n\}$是等差数列，并求数列$\{b_n\}$的首项和公差.

证明 对任意正整数 n，$b_{n+1}-b_n=pa_{n+1}-pa_n=pd$，因此，数列$\{b_n\}$是首项为 pa_1，公差为 pd 的等差数列.

练 习

1. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列.

   (1) 如果 $a_1=2$，$a_3=4$，求公差 d 和 a_2；

   (2) 如果 $a_2=4$，$a_5=2$，求公差 d 和 a_1.

2. 已知 m，n 是方程 $x^2+2x-5=0$ 的两根，求 m，n 的等差中项.

3. △ABC 中，角 B 为 60°，求证：三内角 A，B，C 成等差数列.

4. 若数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-1$，求证：数列$\{a_n\}$成等差数列.

数列求和的方法之一：累加法.

如果数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，那么根据等差数列的定义，可以得到$a_2-a_1=d$，$a_3-a_2=d$，$a_4-a_3=d$，…，$a_n-a_{n-1}=d$ $(n\geqslant 2)$. 将上述$n-1$个等式相加得到

$$a_n-a_1=(n-1)d.$$

由此得到

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

当$n=1$时，该等式的两边均是a_1，这表明该等式对所有正整数$n\in\mathbf{N}^*$都成立，因而它就是**等差数列$\{a_n\}$的通项公式.**

数列$\{a_n\}$成等差数列的充要条件为$a_n=dn+b$.

这个公式表明，当公差d不为零时，$a_n=a_1+(n-1)d$是关于变量n的一次函数，其图象是斜率为d的一条直线上的一列点；反过来，对任意一次函数$f(x)=dx+b$，由于$f(n+1)-f(n)=d(n+1)+b-dn-b=d$，数列$f(1)$，$f(2)$，…，$f(n)$，…就是公差为$d$的一个等差数列.

例5 在8与36中间插入6个数，使这8个数成等差数列，求所插入的6个数.

解 记这8个数所成的等差数列为a_1，a_2，…，a_8，公差为d，其中$a_1=8$，$a_8=36$. 根据等差数列的通项公式，$a_8=a_1+7d=8+7d=36$，得$d=4$. 因此，所插入的6个数分别为12，16，20，24，28和32.

例6 已知等差数列8，5，2，…

(1) 求该数列的第20项；

(2) -121是不是该数列的项?

(3) 该数列共有多少项位于区间$[-200, 0]$内?

解 记该数列为$\{a_n\}$，公差为d，由$a_1=8$，$d=5-8=-3$，得数列的通项公式是$a_n=8-3(n-1)=-3n+11$.

(1) 该数列的第20项$a_{20}=-3\times 20+11=-49$.

(2) 解方程$-3n+11=-121$，得$n=44$，因此，-121是该数列的项.

(3) 解不等式 $-200\leqslant-3n+11\leqslant0$，得 $\frac{11}{3}\leqslant n\leqslant\frac{211}{3}$，该数列位于区间 $[-200,0]$ 内的项从第 4 项起直至第 70 项，共 67 项.

例 7 我国北方某地区为了防止沙漠流动，缓解“沙尘暴”的侵蚀，决定建立若干条防沙林带，其中最前面一条长 133 km，最后面一条长 293 km，各条的长度成等差数列且公差为 40 km. 试求该防沙林带的条数.

解 用 $\{a_n\}$ 表示防沙林带从前至后各条的长度所成的等差数列，由已知条件，有 $a_1=133$，$a_n=293$，$d=40$. 由通项公式，得 $293=133+(n-1)\times40$. 解得 $n=5$.

答：该防沙林带一共有 5 条.

练 习

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，
   (1) $a_4=19$，$a_7=10$，求首项和公差；
   (2) $a_4=10$，$a_{10}=4$，求 a_{14}.
2. 梯子的最高一级宽 33 cm，最低一级宽 110 cm，中间还有 10 级，各级的宽度成等差数列，计算梯子中间各级的宽度.
3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4=10$，$a_7=19$，取出 $\{a_n\}$ 的所有奇数项，组成一个新的数列 $\{b_n\}$. 求证：$\{b_n\}$ 为等差数列，并求其公差.

如图 9-8，在某学校举行的运动会开幕式上，有一队列表演节目. 第一次变阵为：第一行站 1 个同学，第二行站 3 个，…，第六行站 11 个；若干次变阵后又得到这样的一种站法：第一行站 11 个，第二行站 9 个，…，第六行站 1 个.

请同学们思考：队列中总共有多少个同学？可以采用哪些方法进行计算？从计算中你发现了什么？

若将总人数记为 S_6，则

德国数学家高斯（C. F. Gauss，1777－1855）从小聪明过人. 上小学时，有一次数学老师给同学出了一道题：计算从 1 到 100 的自然数之和. 老师认为，这些孩子算这道题目需要很长时间，所以他一写完题目，就坐到一边看书去了. 谁知，他刚坐下，马上就有一个学生举手说：“老师，我做完了.” 老师大吃一惊，原来是班上年纪最小的高斯. 老师走到他身边，只见他在笔记本上写着 5 050，老师问他：“怎么算出来的？”他说：“$(1+100)\times50$ 不就行了吗？” 老师听了，不由得暗自称赞. 为了鼓励他，老师还买了一本数学书送给他.

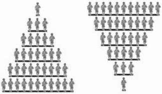


图 9-8

$$S_6 = 1 + 3 + \cdots + 11, \qquad ①$$

$$S_6 = 11 + 9 + \cdots + 1. \qquad ②$$

由 ①＋② 得

$$2S_6 = (1+11) + (3+9) + \cdots + (11+1) = 6 \times 12 = 72,$$

∴ $S_6 = 36$.

对于一般的等差数列$\{a_n\}$，能否用上面求和的方法，去求它的前n项和？

设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，

即 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$，

根据等差数列的通项公式，上式可以写成

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d]. \qquad ③$$

再把项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + [a_n - (n-1)d]. \qquad ④$$

数列求和的方法之二："倒序"求和法.

把③和④两边分别相加，得

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n).$$

由此得到等差数列$\{a_n\}$的前n项和的公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

等差数列的前n项和等于首末两项的和与项数乘积的一半. 因为 $a_n =$

$a_1+(n-1)d$，所以上面的式子又可以写成

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

例 8 某体育场一角的看台是这样安排的，每一排都比前一排多两个座位，看台第一排有 15 个座位，共有 20 排.

(1) 第 10 排有几个座位?

(2) 这一角里共有多少座位?

解 设第 n 排的座位有 a_n 个，则得到数列 $\{a_n\}(1\leqslant n\leqslant 20)$，$\{a_n\}$ 构成一个首项为 15，公差为 2 的等差数列.

(1) 由通项公式，第 10 排的座位数 $a_{10}=15+9\times 2=33$.

(2) 共有多少座位是求该数列的前 20 项之和，根据等差数列前 n 项和的公式，这一角里共有的座位数 $S_{20}=20\times 15+\frac{20\times 19}{2}\times 2=680$.

例 9 已知一个等差数列的前 10 项的和是 310，前 20 项的和是 1 220，求该数列的通项.

首项 a_1 和公差 d 是等差数列最重要的量，把已知条件用涉及 a_1 和 d 的方程表达.

解 记该数列为 $\{a_n\}$，公差为 d，由等差数列前 n 项和的公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，得

$$\begin{cases}S_{10}=10a_1+45d=310,\\ S_{20}=20a_1+190d=1\ 220.\end{cases}$$

解这个二元一次方程组，得

$$\begin{cases}a_1=4,\\ d=6.\end{cases}$$

∴ 该数列的通项 $a_n=4+6(n-1)=6n-2$.

例 10 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2$，求 $\{a_n\}$ 的前 3 项，并求它的通项公式.

若数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，则 $a_n=\begin{cases}S_1, & (n=1),\\ S_n-S_{n-1}, & (n\geqslant 2).\end{cases}$

解 $a_1=S_1=1$，$a_2=S_2-S_1=3$，$a_3=S_3-S_2=5$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，又 $a_1=1$ 满足此式.

所以通项公式为 $a_n=2n-1$.

练 习

1. 根据下列各题中的条件，求相应的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n：

(1) $a_1=2$，$a_n=18$，$n=9$；

(2) $a_1=12$，$d=-2$，$n=20$；

(3) $a_2+a_{n-1}=10$，$n=20$.

2. 一个堆放铅笔的 V 型架的最下面一层放一支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放一支，最上面一层放 20 支，这个 V 形架上共堆放多少支铅笔？

3. 一个堆放铅笔的 V 型架的最下面一层放一支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放一支，V 形架上要堆放 105 支铅笔，一共需要堆放多少层？

4. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_n=n^2+n$，求$\{a_n\}$的前 3 项，并求它的通项公式.

习题 2

学而时习之

1. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列，请在下表中填入适当的数：

a_1	a_2	a_3	公差 d	a_5
-3		6		
	-5		2	

2. 已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个无穷等差数列，公差分别为 d 和 k，求证数列$\{a_n+b_n\}$是等差数列，并求它的公差.

3. 三个数成等差数列，它们的和为 6，且第三个数是第一个数的三倍，求这三个数.

4. 已知$\{a_n\}$是一个等差数列，根据所给条件填写下表：

a_1	d	n	a_n
1	-3		-77
5	10	12	
	6	12	61

5. 已知$\{a_n\}$是等差数列.

(1) 若$a_3=-2$，$a_7=5$，求a_{13}；

(2) 若$a_1+a_6=12$，$a_4=7$，求a_9.

6. 已知$x\neq y$，两个数列x，a_1，a_2，a_3，y和x，b_1，b_2，b_3，b_4，y都是等差数列且公差分别为d_1和d_2，求$d_1:d_2$.

7. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=450$，求a_2+a_8.

8. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，前n项和为S_n.

(1) 若$a_2+a_5=19$，$S_5=40$，求a_1；

(2) 若公差$d=2$，$a_{15}=-10$，求S_{15}；

(3) 若$a_1=1$，$a_n=-55$，$S_n=-405$，求n及公差d；

(4) 若$a_1=\frac{5}{6}$，$d=-\frac{1}{6}$，$S_n=\frac{5}{2}$，求n及a_n；

(5) 若$a_3+a_5+a_7=6$，$a_2+a_4+a_6=-3$，求S_{100}.

9. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$，求该数列的公差d的取值范围.

温故而知新

10. 已知直角三角形的三边成等差数列，求证：三边之比为3∶4∶5.

11. 已知数列$\{a_n\}$是一个首项为a_1，公差为d的无穷等差数列.

(1) 取出数列$\{a_n\}$中的所有奇数项，依原来的先后次序组成一个新数列，求证：这个新数列是等差数列，并求它的首项和公差；

(2) 取出数列$\{a_n\}$中的所有偶数项，依原来的先后次序组成一个新数列，求证：这个新数列是等差数列，并求它的首项和公差.

12. 在通常情况下，从海平面到10 km高空，高度每增加1 km，气温就下降某一固定数值，如果某地海拔1 km处的气温是8.5℃，海拔5 km处的气温是−17.5℃，求海拔8 km处的气温.

13. 一个等差数列共n项，其和为100，前10项之和为25，后10项之和为75，求n.

14. 一个梯形两底边长分别为12 cm和22 cm，将梯形一腰10等分，过每一分点作平行于梯形底边的直线，求这些直线夹在梯形两腰间的线段的长度的和.

15. 已知平面凸n边形($n\geqslant3$)的内角度数之和为$(n-2)180°$，若一凸n边形各

内角的度数成等差数列，公差是 10°，最小内角是 100°，求 n.

16. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{1}{2}$，且前 100 项和 $S_{100}=145$，求 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$.

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1) 求证：S_2，S_4-S_2，S_6-S_4 成等差数列；

(2) 求证：S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等差数列；

(3) 试推广 (1) 和 (2) 的结果，写出你的结论并加以证明.

9.3 等比数列

有一天，小罗在上数学课时，顺手拿起桌上的草稿纸折起飞机来了，但很快被老师发现，老师没有动怒，问小罗："这张纸你可以重复对折多少次？"小罗停了一下，随口说："20 次！"老师要求他下课以后去完成. 但无论他怎样努力，完成 9 次对折都困难.

为什么草稿纸重复对折次数是这样的少呢？我们来看下面的一张表（报纸未对折时厚度记为 t，面积记为 A）：

对折次数	报纸厚度	报纸面积
0	$t=2^0\cdot t$	$A=\frac{1}{2^0}A$
1	$2t=2^1\cdot t$	$\frac{1}{2}A=\frac{1}{2^1}A$
2	$4t=2^2\cdot t$	$\frac{1}{4}A=\frac{1}{2^2}A$
3	$8t=2^3\cdot t$	$\frac{1}{8}A=\frac{1}{2^3}A$
4	$16t=2^4\cdot t$	$\frac{1}{16}A=\frac{1}{2^4}A$
…	…	…
8	$256t=2^8\cdot t$	$\frac{1}{256}A=\frac{1}{2^8}A$

由此可见，草稿纸厚度随着每对折一次就增加一倍，而其面积则相应地减小一半，加上草稿纸本身的拉力，把草稿纸对折第九次无疑比一次对折 256 张纸更困难！

经过此次事件以后，小罗对数学产生了浓厚的兴趣.

如果我们把草稿纸第 n 次对折后的厚度记为 a_n，便得到了一个数列$\{a_n\}$，数列$\{a_n\}$满足 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2\quad(n\geqslant 2)$.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，这样的数列叫作等比数列（geometric progression)，这个常数叫作等比数列的公比（common ratio). 公比通常用 q 表示.

可以将等差数列和等比数列的概念进行类比.

也就是说，当 $n\geqslant 2$ 时，如果 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$，那么数列$\{a_n\}$称为等比数列，q 称为数列$\{a_n\}$的公比.

例 1 下列命题是否成立？如果成立，给出证明，如果不成立，举出反例.

(1) 若数列$\{a_n\}$是一个以 1 为公比的等比数列，则这个数列一定是等差数列；

(2) 若数列$\{a_n\}$是一个以 0 为公差的等差数列，则这个数列一定是等比数列.

解 (1) 以 1 为公比的等比数列是常数列，而任何一个常数列都是等差数列，因此，命题(1)成立.

$\{a_n\}$成等比数列$\Rightarrow$ $a_n\neq 0$，公比 $q\neq 0$.

(2) 各项均为 0 的数列是一个以 0 为公差的等差数列，根据等比数列的定义，它不是等比数列，因此，命题(2)不成立.

例 2 已知数列$\{a_n\}$，求证：

(1) 若数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，则数列$\{10^{a_n}\}$是公比为 $q=10^d$ 的等比数列；

(2) 若数列$\{a_n\}$是公比为 q 的正项等比数列，则$\{\lg a_n\}$是公差为 $d=\lg q$ 的等差数列.

证明 (1) 对每个 n，$10^{a_n}\neq 0$ 且 $\frac{10^{a_{n+1}}}{10^{a_n}}=\frac{10^{a_n+d}}{10^{a_n}}=10^d$，

因此，数列 $\{10^{a_n}\}$ 是公比为 $q=10^d$ 的等比数列.

(2) 对每个 n，$\lg a_{n+1}-\lg a_n=\lg(a_nq)-\lg a_n=\lg q$，

因此，数列 $\{\lg a_n\}$ 是公差为 $d=\lg q$ 的等差数列.

例 2 的结论是等差数列和等比数列的性质，它是这两类数列可以进行类比的基础.

若 a，c 同号，a，c 的等比中项与等差中项有何大小关系？

例 3 如果 a，c 同号，且 $b=\pm\sqrt{ac}$，那么，b 是 a，c 的等比中项．与性质“a，b，c 是等差数列当且仅当 b 是 a 和 c 的等差中项”作类比，试写出等比中项的性质．

解 a，b，c 是等比数列当且仅当 b 是 a 和 c 的等比中项．

如果 a，b，c 成等比数列，由等比数列的定义得 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$，那么 $b^2=ac$，即 $b=\pm\sqrt{ac}$，所以 b 是 a 和 c 的等比中项；

反过来，如果 b 是 a 和 c 的等比中项，那么 $b=\pm\sqrt{ac}$，推出 $b^2=ac$，即 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$，由等比数列的定义知 a，b，c 成等比数列．

想一想：

等比数列 $\{a_n\}$ 中，当 $n\geqslant 2$ 时，是否有 $a_{n-1}\cdot a_{n+1}=a_n^2$？反过来怎样？

练 习

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列．
   (1) 如果 $a_2=4$，$a_5=2$，求公比 q 和 a_1；
   (2) 如果 $a_1=2$，$a_3=4$，求公比 q 和 a_2．
2. 已知 m，n 是方程 $x^2+5x+2=0$ 的两根，求 m，n 的等比中项．
3. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{(-3)^n}$，求证：数列 $\{a_n\}$ 成等比数列．
4. 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{1}{a_n}$，那么数列 $\{b_n\}$ 有怎样的特点？为什么？

设数列 $\{a_n\}$ 是一个首项为 a_1，公比为 q 的等比数列．

能否通过对求等差数列的通项公式的方法作类比，求出等比数列的通项公式呢？

对每个正整数 n，依照等比数列的定义，

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\frac{a_2}{a_1}=q,$$

$$\frac{a_3}{a_2}=q,$$

……

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q,$$

把这 $n-1$ 个等式的两边分别相乘得

$$\frac{a_n}{a_1}=q^{n-1},\ a_n=a_1q^{n-1}.$$

$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

这就是"累乘"法或错位相约法.

当 $n=1$ 时，该等式的两边都是 a_1，这表明该等式对所有正整数 n 都成立.

于是，等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

这个公式表明：当公比 $q>0$，且 $q\neq 1$ 时，$a_n=a_1q^{n-1}$ 是关于变量 n 的指数型函数.

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.

(1) 若 $a_2=2$，$a_5=54$，求 a_n 的通项公式；

(2) 若 $a_1=125$，$q=0.2$，$a_n=3.2\times10^{-4}$，求 n.

解 (1) 由等比数列的通项公式，$a_2=a_1q=2$，$a_5=a_1q^4=54$，两式两边分别相除，得 $q^3=27$，$q=3$. 由 $a_1q=2$，得 $a_1=\frac{2}{3}$. 因此，这个数列的通项公式是 $a_n=\frac{2}{3}\times3^{n-1}=2\times3^{n-2}$.

(2) 由等比数列的通项公式，得 $a_n=3.2\times10^{-4}=a_1q^{n-1}=125\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=5^{4-n}$，$3.2\times10^{-4}=5^{-5}$，所以，$5^{4-n}=5^{-5}$，即 $n=9$.

例 5 某电讯产品自投放市场以来，经过三次降价，单价由原来的 174 元降到 58 元，这种电讯产品平均每次降价的百分数大约是多少（精确到 1%）？

解 设平均每次降价的百分数是 x，那么每次降价后的单价应是降价前的单价的 $(1-x)$ 倍. 这样将单价与三次降价后的单价依次排列，就组成一个等比数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=174$，$a_4=58$，$n=4$. 由等比数列的通项公式，得

$$58=174(1-x)^{4-1},$$

整理后，得

$$(1-x)^3=\frac{1}{3},\ 1-x=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\approx 0.693.$$

因此，

$$x=1-0.693\approx 31\%.$$

答：上述电讯产品平均每次降价的百分数大约是31%.

例6 污水处理厂通过清除水中污染物对污水进行处理，并生产出有用的肥料和清洁用水，在这种处理过程中，可以达到每小时从处理池中清除掉残留污染物的12%.

(1) 一天后污染物含量降低到什么程度？

(2) 使污染物含量减半至少要多少小时？

解 设污水中污物的初始含量为 a_0，又设 n 小时后残留在池中的污物量为 a_n，这个问题的数学模型是数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\begin{cases} a_{n+1}=(1-0.12)a_n=0.88a_n, \\ a_1=0.88a_0. \end{cases}$$

因此，根据题意，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $0.88a_0$，公比为0.88的等比数列，利用通项公式，得 $a_n=0.88^n a_0$.

(1) $a_{24}=0.88^{24}a_0\approx 0.047a_0$，所以，一天后污染物含量降低了95%左右.

(2) 为求何时污物含量会减半，从 $a_n=0.88^n a_0=0.5a_0$ 解出 n，得 $n=\log_{0.88}0.5\approx 5.42$，因此，至少要6小时，污物才会减至一半.

答：一天后污染物含量降低了95%左右；使污染物含量减半至少要6小时.

练 习

1. 求下列等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式：

(1) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \cdots$ (2) $a_3=8,\ a_5=2$.

2. 培育水稻新品种，如果第一代得到120粒种子，并且从第一代起，由以后各代

的每一粒种子都可以得到下一代的 120 粒种子，到第 5 代大约可以得到这个新品种的种子多少粒？

3. 如果在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$m+n=p+q$，那么 a_m，a_n，a_p，a_q 有什么关系呢？证明你的结论．

相传，古印度的舍罕王打算重赏国际象棋（如图 9-9）的发明者——宰相西萨·班·达依尔．于是，这位宰相跪在国王面前说："陛下，请您在这张棋盘的第一个小格内放一粒麦子，在第二个小格内放两粒，第三小格内放四粒，照这样下去，每一小格都比前一小格加一倍．陛下啊，请把放满棋盘上所有 64 个小格的麦粒都赏给您的仆人吧！"国王慷慨地答应了宰相的要求，他下令将一袋麦子拿到宝座前．计数麦粒的工作开始了．第一小格内放一粒，第二小格内放两粒，第三小格内放四粒……还没放到第二十格，袋子已经空了．一袋又一袋的麦子被扛到国王面前来……很快就可以看出，即使拿来全印度的小麦，国王也无法兑现他对宰相许下的诺言！

图 9-9

这位聪明的宰相到底要求多少麦粒呢？稍微作一点计算：

每一个小格内的麦粒数依次为 1，2，2^2，2^3，2^4，…，2^{63}，其总和记为 S_{64}，则

$$S_{64}=1+2+4+8+\cdots+2^{62}+2^{63}. \quad ①$$

①式右边每一项的 2 倍是它的后一项，因此

$$2S_{64}=2+4+8+16+\cdots+2^{63}+2^{64}. \quad ②$$

由②－①可得 $S_{64}=2^{64}-1$.

一般地，设公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

由

$$a_n=qa_{n-1},$$

得

$$\begin{cases} S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n, \\ qS_n=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}. \end{cases}$$

将第 3 题中你所得的结论作为条件，能否推出 $m+n=p+q$？

在古埃及，很早就有人研究等比数列的求和问题了．有人还将这一问题编成了一首童谣，使之广为流传：

我赴圣地爱弗西，
途遇妇女数有七，
一人七袋手中提，
一袋七猫数整齐，
一猫七子紧相依，
妇与袋，猫与子，
几多同时赴圣地．

利用计算机可以算出 $2^{64}-1=$
18 446 744 073 709 551 615，如果造一个宽 4 m，长 4 m 的粮仓来储存这些小麦，则粮仓可以连接地球与太阳．

$\therefore\quad (1-q)S_n=a_1-a_{n+1}=a_1(1-q^n)$.

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$；

q 倍错位相减法.

当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$. 所以**等比数列的求和公式为**：

当公比 q 没有确定时，运用求和公式一般要对公比 q 是否为1进行讨论.

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q},\ (q\neq1),\\ na_1,\qquad\quad (q=1)\end{cases}\quad 或\quad S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1-a_nq}{1-q},\ (q\neq1),\\ na_1,\qquad\quad (q=1)\end{cases}$$

例7 求等比数列1，2，4，…从第5项到第10项的和.

解 由 $a_1=1$，$a_2=2$，得 $q=2$.

$\therefore\quad S_4=\dfrac{1\times(1-2^4)}{1-2}=15$，

$S_{10}=\dfrac{1\times(1-2^{10})}{1-2}=1\ 023$.

所以，从第5项到第10项的和为 $S_{10}-S_4=1\ 008$.

例8 已知 S_n 是等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，S_3，S_9，S_6 成等差数列，试求$\{a_n\}$的公比.

解 $\because$ S_3，S_9，S_6 成等差数列，

$\therefore$ $S_3+S_6=2S_9$.

若 $q=1$，则 $S_3=3a_1$，$S_6=6a_1$，$S_9=9a_1$，

由 $a_1\neq0$ 可得 $S_3+S_6\neq2S_9$，与题设矛盾，

$\therefore\quad q\neq1$.

利用等比数列求和公式时，要讨论公比 q 是否为1.

由 $\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$，

整理后，得 $q^3+q^6=2q^9$.

$\because$ $q\neq0$，$\therefore$ $1+q^3=2q^6$.

将 q^3 视为整体，解之得 $q^3=1$(舍去)或 $q^3=-\dfrac{1}{2}$，即 $q=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

例9 某制糖厂第1年制糖5万吨，如果平均每年的产量比上一年增加10%，那么从第1年起，约几年内可使总产量达到30万吨(保留到个位)?

分析 由题意可知，每年产量比上一年增加的百分率相同，所以

从第 1 年起，每年的产量组成一个等比数列，总产量则为等比数列的前 n 项和.

解 设制糖厂第 n 年的产量为 a_n 万吨. 由题意，$\{a_n\}$ 是一个等比数列，其中 $a_1=5$，$q=1+10\%=1.1$. 由于 $S_n=30$.

$\therefore \quad \dfrac{5(1-1.1^n)}{1-1.1}=30.$

整理后，得 $\quad 1.1^n=1.6.$

两边取对数，得 $\quad n\lg 1.1=\lg 1.6.$

用计算器求得 $\quad n=\dfrac{\lg 1.6}{\lg 1.1}\approx 5$（年）.

答：约 5 年内可以使总产量达到 30 万吨.

例 10 某林区为保护森林资源，划出一片 80 公顷的采伐区，其余为禁伐区. 计划在 2003 年采伐森林 a 公顷，以后每一年均比上一年减少 5% 的采伐面积.

(1) 以 2003 年为第一年，设第 n 年的采伐面积为 a_n，试求 a_n 的表达式.

(2) 若被采伐的森林不能再生，问 2003 年最多能采伐的面积为多少公顷？

分析 由题意可知，每年采伐面积比上一年减少的百分率相同，所以从第 1 年起，每年的采伐面积组成一个等比数列.

解 (1) $a_1=a$，$q=1-5\%=0.95$，$a_n=0.95^{n-1}a$.

(2) 设 n 年采伐的总面积为 S_n，则

$$S_n=\frac{a(1-0.95^n)}{1-0.95}=20(1-0.95^n)a.$$

$\because \quad S_n\leqslant 80,$

$\therefore \quad a\leqslant\dfrac{4}{1-0.95^n}$ 恒成立.

又 $\because \quad \dfrac{4}{1-0.95^n}>4$ 恒成立，$\therefore \quad a\leqslant 4.$

答：2003 年最多能采伐的面积为 4 公顷.

想一想：若 $a_n\in(a,b)$，则下列各式恒成立时，实数 m 需满足的条件分别是什么？

①$a_n>m$；

②$a_n\leqslant m$；

③$a_n<m$；

④$a_n\geqslant m$.

练 习

1. 求等比数列 1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8}$，…，从第 5 项到第 10 项的和.
2. 已知一个等比数列的第 3 项为 21，第 4 项为 −63，求它的前 5 项之和 S_5.
3. 一个球从 32 m 的高处自由落下，每次着地后又跳回到原来高度的一半，当它第 6 次着地时，共经过的路程是多少？
4. 假设某人建议：为祝贺中国首次载人飞船发射成功，请您把此消息立即用 E-mail转发给您的 10 位朋友．这是一个好的建议还是坏的建议？你认为呢？

习题 3

学而时习之

1. 已知数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，试在下表中填入适当的数：

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	−1	3		
	4		2	

2. 在 2 和 9 之间插入两个数，使前三个数依次成等差数列，后三个数成等比数列，试写出这个数列.
3. 设数列$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=3\times 2^n$，且 $c_n=b_{2n-1}+b_{2n}$，求证：$\{c_n\}$是等比数列.
4. 已知数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，试根据所给条件填写下表：

a_1	q	n	a_n
0.03	9	6	
	−2	7	32
1	2		256

5. 在 320 与 5 中间插入 5 个数，使这 7 个数成等比数列，求这个等比数列.
6. 求有穷等比数列 27，−9，3，…，$\frac{1}{243}$的各项的和.
7. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=-2.7$，$q=-\frac{1}{3}$，$a_n=\frac{1}{90}$，求 n 及前 n 项和 S_n.

8. 设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，公比为 q.

(1) 如果 $S_6=\frac{189}{4}$，$q=\frac{1}{2}$，求 a_1；

(2) 如果 $S_3=14$，$a_1=2$，求 q.

温故而知新

9. 设数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，试证：数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$仍是等比数列，并求该数列的公比.

10. 对等差数列的性质"若$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，m，n 是任意正整数，则 $a_m-a_n=(m-n)d$" 作类比，得出对任意等比数列成立的相应性质，并给出证明.

11. 假设世界人口每年增加 1%，求 25 年后的世界人口是现在人口的多少倍以及人口翻一番所需的时间. 若年增长率为 2%，结果又如何?

12. (1) 已知^{14}C以与残留的含量成比例（衰变率）衰减，^{14}C的半衰期（即衰减为含量的一半所需的时间）为 5 700 年，建立一个用^{14}C确定年代的模型.

(2) 考古学家发现一个古人猿的颅骨，只残留原先的^{14}C含量的 1%，古人猿的颅骨已存在多少年了?

13. 已知等比数列 6，3，1.5，…，求使得该等比数列前 n 项和 S_n 大于 11.5 的最小的 n 值.

14. 为祝贺中国首次载人飞船发射成功，某通讯公司发出短信："请您把中国首次载人飞船发射成功的消息转发给 10 位朋友，并且注明您是第 x 位接收此消息的……" 假定某通讯公司发出的 10 条短信中的 x 值均为 1，以后每一位收到短信后将 x 值都增加 1，再将短信发出. 据统计，所发短信中 x 的最大值为 10. 试问通过这家公司最多发了多少条短信?

数学实验

乐音的频率比

声音是由振动物体发出的，振动频率越高，音调越高．比如，音乐中 1（do），2（re），3（mi），4（fa），5（so），6（la），7（si），$\dot{1}$（do）这 8 个音（用简谱表示）一个比一个高，就是说它们的频率一个比一个高．

已经知道高八度的 $\dot{1}$ 的频率是 1 的 2 倍．那么，2，3，4，5，6，7 的频率分别是 1 的多少倍呢？

从 1 到 $\dot{1}$ 要经过 12 个半度音．假设所有的音的地位平等，每升高半度，频率乘以同一个倍数 k．从 1 到 $\dot{1}$ 经过 12 个半度，频率变成 2 倍．可见 $k^{12}=2$，$k=2^{\frac{1}{12}}$．上述 8 个音中，从 3 到 4 升高半度，从 7 到 $\dot{1}$ 升高半度，其余相邻的音相差两个半度．故各音的频率比依次为：

$$1,\ 2^{\frac{1}{6}},\ 2^{\frac{1}{3}},\ 2^{\frac{5}{12}},\ 2^{\frac{7}{12}},\ 2^{\frac{3}{4}},\ 2^{\frac{11}{12}},\ 2.$$

用计算机按上面所说的频率产生乐音，并在喇叭中播送出来，或者进一步将它们编成乐曲，听一听你自己编写的曲子．

例如，试一试运行下面的 BASIC 语句，听一听效果：

```
A=256: K=2^(1/12): T=8
SOUND A,T: SOUND A*K^2,T: SOUND A*K^4,T
SOUND A*K^5,T: SOUND A*K^7,T: SOUND A*K^9,T
SOUND A*K^11,T: SOUND A*2,T: END
```

其中“SOUND A,T”产生频率为 A、时间长为 T 的音．

为了容易懂，这个语句写得比较笨．你可以修改它，也可以换成别的乐曲．

阅读与思考

初识混沌

随机与确定并存，有序与混沌共处，天上人间莫非如此. 混沌(chaos)是在确定规律的支配之下长期行为紊乱运动的同义语.

面包师把1尺长的生面条拉长成2尺，从中点切断，然后把右半段左移重合到左半段上，原来在生面条上距左端点为 x 的一粒黑芝麻移动到何处是唯一确定的. 设那粒黑芝麻移动到距左端点 y 处，则

$$y=f(x)=\begin{cases}2x, & \left(0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\right),\\ 2x-1, & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right).\end{cases}$$

同样地，对1尺长的生面条进行第二轮的拉伸、左移、重合，那粒黑芝麻距左端点多远当然还是唯一确定的. 如此重复上述简单的确定的动作，n 轮之后，按理说这粒黑芝麻究竟离左端点多远它是可以预测的. 但是，事情并非如此简单和可以预测.

设这粒黑芝麻一开始距左端点的距离为 x_0，经过第 n 轮的拉伸、左移和重叠后，这粒黑芝麻距左端点的距离为 x_n，黑芝麻的位置产生的数列 $\{x_n\}$ 满足递推关系 $x_{n+1}=f(x_n)$ 和初始条件 $x_1=f(x_0)$. 如何发现数列 $\{x_n\}$ 的变化规律呢？需要有个绝招. 闭区间 $[0,1]$ 中的任意实数 x 都可以用十进制表示成

$$x=\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}+\cdots=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

的形式，其中每个 $b_n\in\{0,1,2,\cdots,8,9\}$. 类似地，$x$ 也可以写成

$$x=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}+\cdots=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

的形式，其中每个 $a_n\in\{0,1\}$，这就是 $[0,1]$ 中的实数 x 的二进制表示．例如：在十进制表示下，$\frac{3}{4}=0.75$；而在二进制表示下，$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=0.11$．利用实数的二进制表示就很容易发现数列 $\{x_n\}$ 的规律性．设在二进制表示下，位于 $[0,1]$ 中的实数 x 写成

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots.$$

若 $0\leqslant x<\frac{1}{2}$，则 $a_1=0$，

$$f(x)=2x=\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}+\cdots;$$

若 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，则 $a_1=1$，

$$f(x)=2x-1=\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}+\cdots.$$

因此，无论何种情况，在二进制表示下，

$$f(x)=0.a_2a_3\cdots a_n\cdots.$$

于是，函数 $f(x)$ 可以形象地被叫作“砍头函数”．函数 $f(x)$ 的这一“砍头性质”表明，在二进制表示下，若 $x_0=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，则 $x_n=0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots$，这也可以叫作数列 $\{x_n\}$ 的通项公式．

现在，取两个初始值 x_0 和 x_0'，在二进制表示下，

$$x_0=0.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots,\qquad x_0'=0.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}'\cdots,$$

其中 $a_{n+1}\neq a_{n+1}'$，则 $|x_0-x_0'|\leqslant\frac{1}{2^n}$．当 n 相当大，例如 $n=1\ 000$ 时，x_0 与 x_0' 几乎就是同一个点，现实的观测已无法分辨！但是，由 x_0 确定的数列 $\{x_n\}$ 和由 x_0' 确定的数列 $\{x_n'\}$ 的第 n 项分别是

$$x_n=0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots,\qquad x_n'=0.a_{n+1}'a_{n+2}'\cdots,$$

而 $|x_n-x_n'|\geqslant\frac{1}{2}$，整整偏差了活动范围 $[0,1]$ 的 50%，真是差之毫厘，谬以千里！

这一结果表明，只有当面包师在反复操作面条的过程中，每次都不产生丝毫的偏差，黑芝麻的位置才是可以预测的．而这种情况

在实际生活中不可能发生．因此，在多次反复操作后黑芝麻的位置实际上是根本不可预测的！由递推关系确定的数列对初始条件的极端敏感性，初始值的小的变化可以造成数列本身的长期性态大的变化，这正是所谓混沌的实质表现之一．

在很多方面都有混沌现象产生．尽管运用了正确的气象动力学原理和最先进的电子计算机，但是想要得到长期准确的天气预报还是一件十分困难的任务，并且预报经常很不准确，这是为什么呢？数学给出了一个答案．气象预报依赖现在与过去的许多观测值，而观测值是没办法不产生丝毫误差的．由于描述气象变化的数学模型是一个混沌系统，初始观测值的非常微小的差别会造成偏差巨大的长期预报，难怪长期预报总是很难准确！美国气象学家洛仑兹(Lorenz)不无调侃地说："巴西热带雨林中的一只蝴蝶多扇动了一次翅膀，就可能引发美国得克萨斯州的一场龙卷风．"此话很有道理，人称气象学上的"蝴蝶效应"．

在生态演化，经济运行，综合国力长消，人体心脑血管胀缩等诸多领域中都潜伏着确定性规律支配下的混沌现象．混沌常常潜伏在人们认为是得到控制的事物中，你是否相信，人们认为已经理解的事情可能会"无法控制"并造成不可预测的结果？

混沌是一个数学分支，也是一种科学的世界观．

9.4 分期付款问题中的有关计算

分期付款方式在今天的商业活动中应用日益广泛，被越来越多的顾客所接受，这一方面是因为很多人一次性支付售价较高商品的款额有一定的困难，另一方面是因为不少商店也在不断改进营销策略，方便顾客购物和付款．分期付款是与每个家庭、每个人的日常生活密切相关的．

我们来看这方面的一个问题：

购买一件售价为 5 000 元的商品，采用分期付款的办法，每期付款数相同，购买后 1 个月第 1 次付款，再过 1 个月第 2 次付款，如此下去，共付款 5 次后还清，如果按月利率 0.8%，每月利息按复利计算（上月利息要计入下月本金），那么每期应付款多少？

分析 本题可通过逐月计算欠款来处理，根据题意，第 5 个月的欠款数为零，据此可得等量关系：

$$x + 1.008x + 1.008^2x + 1.008^3x + 1.008^4x = 5000\cdot 1.008^5$$

第 5 次付款（即最后一次付款）x 元，（由于款已全部付清，因此这一期付款没有利息）	第 4 次付款 x 元后到款全部付清时连同利息之和	第 3 次付款 x 元后到款全部付清时连同利息之和	第 2 次付款 x 元后到款全部付清时连同利息之和	第 1 次付款 x 元后到款全部付清时连同利息之和	5000元商品在购买 5 个月后（即货款全部付清时）连同利息之和

各次（期）所付的款以及各次（期）所付款到最后一次付款时所生的利息之和 = 商品的售价及从购买到最后一次付款时的利息之和

解法一 设每月应付款 x 元，

购买 1 个月后的欠款数为 $5\,000\cdot 1.008-x$；

购买 2 个月后的欠款数为 $(5\,000\cdot 1.008-x)\cdot 1.008-x$，

即 $5\ 000\cdot 1.008^2-1.008x-x$;

购买3个月后的欠款数为

$$(5\ 000\cdot 1.008^2-1.008x-x)\cdot 1.008-x,$$

即 $5\ 000\cdot 1.008^3-1.008^2x-1.008x-x$;

……

购买5个月后的欠款数为：

$5\ 000\cdot 1.008^5-1.008^4x-1.008^3x-1.008^2x-1.008x-x$，

由题意 $5\ 000\cdot 1.008^5-1.008^4x-1.008^3x-1.008^2x-1.008x-x=0$，

即 $x+1.008x+1.008^2x+1.008^3x+1.008^4x=5\ 000\cdot 1.008^5$. ①

观察一下，上述等式有什么特点？

可以发现，上述等式是一个关于 x 的一次方程，且等号左边是一个首项为 x，公比为1.008的等比数列的前5项的和. 于是

$$x\cdot\frac{1.008^5-1}{1.008-1}=5\ 000\cdot 1.008^5,$$

$$x=\frac{5\ 000\cdot 1.008^5(1.008-1)}{1.008^5-1}\approx 1\ 024.1\ (\text{元}).$$

这就是说，每月应付款1 024.1元.

等式①说明了：分期付款，各次(期)所付的款以及各次(期)所付款到最后一次付款时所生的利息之和，等于商品的售价及从购买到最后一次付款时的利息之和. 实际上这是分期付款中的规定，从上面的过程中我们可看出这种规定是合理可行的. 于是我们有了解法二，利用分期付款的有关规定直接列出方程.

解法二 设每月应付款 x 元，那么到最后一次付款时（即商品购买5个月后）付款金额的本利和为

$$(x+1.008x+1.008^2x+1.008^3x+1.008^4x)\ \text{元};$$

另外，5 000元商品在购买5个月的本利和为 $5\ 000\cdot 1.008^5$ 元.

根据题意，得

$x+1.008x+1.008^2x+1.008^3x+1.008^4x=5\ 000\cdot 1.008^5$.

以下同解法一.

从数学的角度看，分期付款是等比数列前 n 项和的公式在购物付款方式上的一个实际应用．问题的关键在于需要了解分期付款到底是怎么一回事，尤其要弄清以下情况和规定：

在分期付款中，每月的利息均按复利计算；分期付款中规定每期所付款额相同；分期付款时，商品售价和每期所付款额在货款全部付清前会随着时间推移而不断增值；各期所付款额连同到最后一次付款所生的利息之和等于商品售价及从购买到最后一次付款时的利息之和（这一规定是列方程解决问题的关键）．

习题 4

上下而求索

顾客购买一件售价为 5 000 元的商品．如果采取分期付款的方式，那么在一年内将款全部付清且每次付款数相同的前提下，商店提出了下表所示的几种付款方案，供顾客选择．

方案类别	分几次付清	付款方法
1	3 次	购买后 4 个月第 1 次付款，再过 4 个月第 2 次付款，再过 4 个月第 3 次付款
2	6 次	购买后 2 个月第 1 次付款，再过 2 个月第 2 次付款，…，购买后 12 个月第 6 次付款
3	12 次	购买后 1 个月第 1 次付款，再过 1 个月第 2 次付款，…，购买后 12 个月第 12 次付款
注	规定月利率为 0.8%，每月利息按复利计算	

（1）试求对应于每种方案顾客应付款的总额；

（2）从这 3 种不同的分期付款方案中，你能否发现某种规律性的东西？写出你所发现的规律，并说明理由；

（3）试抽象出上述分期付款方式的一般数学模型，并推导出每次应付款额的计算公式．

实习作业

教育储蓄的收益与比较

教育储蓄是国家为鼓励城乡居民以储蓄存款方式，为子女接受非义务教育和积蓄资金，促进教育事业发展而开办的．为了孩子将来能接受良好的高等教育，家长为子女办理教育储蓄是理想的投资．请你收集本地区教育储蓄的信息，思考以下问题，并将你得到的一些结论写成一篇报告．

1．依据教育储蓄的方式，每月存 50 元，连续存 3 年（或 6 年），到期时一次可支取本息多少元？

2．依据教育储蓄的方式，每月存 a 元，连续存 3 年（或 6 年），到期时一次可支取本息多少元？

3．依据教育储蓄的方式，每月存 50 元，连续存 3 年（或 6 年），到期时一次可支取本息比同档次的"零存整取"多收益多少元？

4．欲在 3 年后一次支取教育储蓄本息合计 1 万元，每月应存多少元？

5．欲在 3 年后一次支取教育储蓄本息合计 a 万元，每月应存多少元？

6．依据教育储蓄的方式，原打算每月存 100 元，连续存 6 年，可是到 4 年时，学生需要提前支取本息，一次可支取本息多少元？

7．依据教育储蓄的方式，原打算每月存 a 元，连续存 6 年，可是到 b 年时，学生需要提前支取本息，一次可支取本息多少元？

8．不用教育储蓄的方式，而用其他储蓄的方式，每月存 100 元，连续存 6 年，到期后取出使用．试探讨以现行的利率标准可能的最大收益，将得到的结果与教育储蓄作比较．

小结与复习

一、指导思想

数列作为一种特殊的函数，是反映自然规律的数学模型．学生将通过对日常生活中大量实际问题的分析，建立等差数列和等比数列这两种数学模型，探索并掌握它们的一些基本数量关系，感受这两种数列模型的广泛应用，并利用它们解决一些实际问题．

二、内容提要

本章的主要内容是数列的概念，等差数列和等比数列的通项公式和前 n 项和的公式．

有规则地按次序排列的一列数叫作数列，从抽象的数学观点看，数列实际上就是定义在正整数集 $\mathbf{N}^*$（或其有限子集）上的函数，因此，数列可以直观地表现为平面上的一列点．给出数列的方式通常有两种：

第一种方式是通项公式；

第二种方式是递推关系．

讨论数列主要讨论数列的变化规律，一旦数列具有通项公式，讨论数列的变化规律可以借助函数的一些性质，否则，可以先利用计算机的强大计算功能，算出数列的成千上万项，再通过观察，猜测并证明数列可能的变化规律．

本章详细讨论了两种基本的数列——等差数列和等比数列，涉及的知识点如下：

数列	等差数列	定义：从第二项起，每一项与它前一项之差都等于一个常数.
		递推公式：$a_n-a_{n-1}=d\ (n\geqslant 2)$
		通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$
		前 n 项和的公式：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$
	等比数列	定义：从第二项起，每一项与它前一项的比是非零常数.
		递推公式：$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q\ (n\geqslant 2)$
		通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$
		前 n 项和的公式：$S_n=\begin{cases}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & (q\neq 1)\\ na_1, & (q=1)\end{cases}$ 或 $S_n=\begin{cases}\frac{a_1-a_nq}{1-q}, & (q\neq 1)\\ na_1, & (q=1)\end{cases}$

数列是许多应用问题的数学模型，在数学建模的过程中，关键是根据条件列出递推公式.

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求.

（1）理解数列的概念，能用函数的观点认识数列；了解数列的通项公式，会根据数列的通项公式写出数列的任意一项，会根据数列的递推公式写出数列的前5项.

（2）理解等差数列的概念，掌握等差数列的通项公式和前 n 项和的公式，并能运用公式解决一些简单问题.

（3）掌握等比数列的通项公式和前 n 项和的公式，并能运用公式解决一些简单问题.

2. 需要注意的问题.

（1）数列概念与函数概念的联系：相应于数列的函数是一种定义域为正整数集（或它的前 n 个数组成的有限子集）的函数，它是一种自变量“等距离”地离散取值的函数. 从这个意义上看，它丰富了学生所接触的函数概念的范围. 但数列与函数并不能划等号，数列是相应函数的一系列函数值. 基于以上联系，数列也可用图象表示，从而可利用图象的直观性来研究数列的性质. 数列的通项公

式实际上是相应函数的解析表达式．而数列的递推公式也是表示相应函数的一种方式，因为只要给定一个自变量的值 n，就可以通过递推公式确定相应的 $f(n)$．这也反过来说明作为一个函数并不一定存在直接表示因变量与自变量关系的解析式．

（2）等差数列与一次函数、二次函数的联系：

从等差数列的通项及求和公式可以知道，公差不为零的等差数列的每一项 a_n 是关于项数 n 的一次函数式，前 n 项和 S_n 是 n 的二次函数式，于是可以利用一次函数和二次函数的性质来认识等差数列．

（3）等比数列与指数型函数的联系：

由于首项为 a_1、公比为 q 的等比数列的通项公式可以写成 $a_n=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$，它与指数函数 $y=a^x$ 有着密切联系，从而可利用指数函数的性质来研究等比数列．

（4）注意等差数列与等比数列的对比，突出两类数列的基本特征．等差数列与等比数列在内容上是完全平行的，包括：定义、性质（等差还是等比）、通项公式、前 n 项和的公式、两个数的等差（等比）中项，具体问题里成等差（等比）数列的三个数的设法等．因此在学习时可采用对比方法，以便于弄清它们之间的联系与区别．顺便指出，一个数列既是等差数列又是等比数列的充要条件是它是非零的常数列．

四、参考例题

例1 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1=-393$，$a_2+a_3=-768$，$\{b_n\}$ 是公比为 $\frac{9}{10}$ 的等比数列，且 $b_3=\frac{81}{50}$．

（1）写出 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）试求满足不等式

$$\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}}{m+1}\leqslant-160b_2$$

的正整数 m．

解 (1) 依题意$(a_1+d)+(a_1+2d)=-768$，

又 $a_1=-393$，∴ $d=6$，　$a_n=6n-399$.

∵ $b_3=\frac{81}{50}=b_1\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2$，

∴ $b_1=2$，　　$b_n=2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$.

(2) $a_{m+1}=6m-393$，$a_{2m}=12m-399$.

由　　$\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}}{m+1}\leqslant-160b_2$，

得　　$\frac{m[(6m-393)+(12m-399)]}{m+1}\leqslant-160\cdot2\cdot\frac{9}{10}$，

则　　$m^2-12m+32\leqslant0$，　$4\leqslant m\leqslant8$.

∴ 满足不等式的正整数 m 为 4，5，6，7，8.

例 2 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=20$，前 n 项和为 S_n，且 $S_{10}=S_{15}$，求当 n 取何值时，S_n 有最大值，并求出它的最大值.

解 由 $a_1=20$，$S_{10}=S_{15}$，解得公差 $d=-\frac{5}{3}$.

解不等式　$a_n=a_1+(n-1)d=20-\frac{5}{3}(n-1)\geqslant0$，

得　　$n\leqslant13$.

∴ a_1，a_2，…，a_{11}，a_{12} 均为正数，$a_{13}=0$，而 a_{14} 及以后各项为负数.

∴ 当 $n=12$ 或 13 时，S_n 有最大值，且最大值为

$$S_{12}=S_{13}=130.$$

例 3 从社会效益和经济效益出发，某地投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业. 打算本年度投入 800 万元，以后每年投入将比上年减少$\frac{1}{5}$. 本年度当地旅游业收入估计为 400 万元，由于该项建设对旅游业的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上年增加$\frac{1}{4}$.

(1) 设 n 年内（本年度为第一年）总投入为 a_n 万元，旅游业总收入为 b_n 万元. 写出 a_n，b_n 的表达式；

（2）至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入？

解 （1）第 1 年投入为 800 万元，第 2 年投入为 $800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)$万元，…，第 n 年投入为 $800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$万元.

所以，n 年内的总投入为

$$\begin{aligned}a_n&=800+800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)+\cdots+800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\\&=4\,000\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right].\end{aligned}$$

第 1 年旅游业收入 400 万元，第 2 年旅游业收入为 $400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)$万元，…，第 n 年旅游业收入为 $400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)^{n-1}$万元.

所以，n 年内的旅游业总收入为

$$\begin{aligned}b_n&=400+400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)^{n-1}\\&=1\,600\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right].\end{aligned}$$

（2）设至少经过 n 年旅游业的总收入才能超过总投入，由此 $b_n-a_n>0$，即

$$1\,600\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]-4\,000\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]>0.$$

化简得 $$5\times\left(\frac{4}{5}\right)^n+2\times\left(\frac{5}{4}\right)^n-7>0.$$

设 $x=\left(\frac{4}{5}\right)^n$，代入上式化简整理得 $5x^2-7x+2>0$，

解此不等式，得 $x<\frac{2}{5}$ 或 $x>1$（舍去）.

于是 $\left(\frac{4}{5}\right)^n<\frac{2}{5}$， $n\geqslant 5$.

答：至少经过 5 年旅游业的总收入才能超过总投入.

复习题九

学而时习之

1. 写出下面数列的一个通项公式，使它的前5项分别是下列各数：

(1) $\frac{3}{2}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{9}{16}$，$\frac{11}{32}$，…；

(2) 1，$-\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$-\sqrt[4]{4}$，$\sqrt[5]{5}$，…；

(3) $\frac{3}{2}$，1，$\frac{5}{8}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{7}{32}$，…；

(4) 1，3，7，15，31，….

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是

$$a_n=\sqrt{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

写出数列$\{a_n\}$的前8项，并求a_{100}.

3. 数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=n-(-1)^n$，写出数列$\{a_n\}$的前4项并求它的前100项之和S_{100}.

4. 写出下面数列$\{a_n\}$的前5项.

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$；

(2) $a_1=3$，$a_2=6$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$.

5. 选择题.

(1) 在a和b（$a\neq b$）两数之间插入n个数，使它们与a，b组成等差数列，则该数列的公差为（　）

(A) $\frac{b-a}{n}$　(B) $\frac{a-b}{n+1}$　(C) $\frac{b-a}{n+1}$　(D) $\frac{b-a}{n+2}$

(2) 已知$\{a_n\}$是等比数列，则①$\{a_n^2\}$是等比数列；②$\{a_{2n}\}$是等比数列；③$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等比数列；④$\{\lg a_n\}$是等差数列. 上述结论中恒成立的个数是（　）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

(3) 若$2^a=3$，$2^b=6$，$2^c=12$，则a，b，c（　）

(A) 是等差数列，但不是等比数列

(B) 是等比数列，但不是等差数列

(C) 是等差数列，也是等比数列

(D) 既不是等差数列，也不是等比数列

6. 某工厂 1 月份的产值为 a 万元，12 月份的产值为 b 万元（$b>a$）.

(1) 若该厂每月增加的产值相同，求 10 月份的产值及全年的总产值；

(2) 若该厂每月产值增长的百分比相同，求 10 月份的产值及全年的总产值.

7. (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_m=a$，$a_n=b$，$m\neq n$，求 a_{m+n}；

(2) 如果 $\{a_n\}$ 为等比数列，其中 $a_m=a$，$a_n=b$，$m\neq n$，求 a_{m+n}.

温故而知新

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=n^2-10n+10$，

(1) 数列 $\{a_n\}$ 从第几项起各项的数值逐渐增大？

(2) 数列 $\{a_n\}$ 的哪些项为正数？

(3) 数列中是否存在数值与首项相同的项？

9. 某区域环境噪声平均值（分贝）见右表：如果噪声平均值依次逐年按表中的规律减少，从 2001 年起，经过多少年，噪声平均值将小于 42 分贝？

年份	1998	1999	2000	2001
分贝	57.8	57.2	56.6	56.0

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中公差 $d=\frac{1}{2}$，且 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=60$，求它的前 100 项之和 S_{100}.

11. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和，求证：数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也是等差数列.

12. 已知直角三角形的三条边 a,b,c（c 为斜边）成等比数列，q 为公比，求 q 的值.

13. 某城市 1993 年底人口为 500 万，人均住房面积为 6.4 平方米，到 2003 年年底该市的人均住房面积翻了一番. 假定该市每年人口的平均增长率为 1%，求这 10 年中该市每年平均新增住房的面积数（精确到 1 万平方米）.

上下而求索

14. 在数列$\{a_n\}$中，设

$$S_1=a_1+a_2+a_3,$$
$$S_2=a_4+a_5+a_6,$$
$$S_3=a_7+a_8+a_9.$$

(1) 若数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，

求证：S_1，S_2，S_3 成等差数列，并求这个数列的公差；

(2) 若数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，

求证：S_1，S_2，S_3 成等比数列，并求这个数列的公比；

(3) 推广上述结论，提出新的猜想，并加以证明.

15. 设$\{a_n\}$是一个等差数列，$\{b_n\}$是一个等比数列.

(1) 若 $a_{10}=0$，试证：当 $n<19$ 时，必有 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}$；

(2) 如果存在某个正整数 K，使得 $a_K=0$，那么 (1) 中的等式应改成何种形式？证明你的结论；

(3) 对等比数列$\{b_n\}$，类似的结论是什么？证明你的结论.

第10章 不等式

天不均匀地不平，　凤云变幻大江东.
入水光路改方向，　露珠圆圆看晶莹.
选优汰劣费思量，　极大极小造化功.
从头细说不等式，　抽丝剥茧乐融融.

不等关系与相等关系都是客观事物的基本数量关系，是数学研究的重要内容. 本章将研究和处理不等关系，探求生产生活实际中一些问题的最佳方案.

问题探索

光的折射

光在同一介质中沿直线传播，走的是路程最短的路线．光在反射时服从反射定律，反射角等于入射角，这也是从一点出发经过反射后到达另一点的最近的路线．看来，光在选择路线上是很“聪明”的，似乎总是选择路程最短的路线．但是，光从一种介质进入另一种介质时，却不走直线而走折线，没有沿着路程最短的路线运行．是不是光变“傻”了呢？如果我们仍然认为光是聪明的而决不会做傻事，就可以设想：光在不同介质中的速度不同，那么，在速度小的介质中少走一些路程，在速度大的介质中多走一些路程，走出一条折线，即使总路程略有增加，但总时间仍然可能减少，仍然可能是划算的．这样看来，走折线不但不傻，反而可能是绝顶聪明的表现：走一条最节省时间的路线！到底走怎样的路线才能使时间最短呢？

光走直路，聪明！

经过水面走“折”路，傻吗？

通过实验，我们得知，光在水面上会发生折射．如图 10-1，记入射角为 α，折射角为 β，此时，折射角 β 总小于入射角 α；同时，光在空气与水中的速度分别为 v_1 与 v_2，由光的折射定律得知

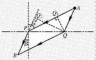


图 10-1

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

由此我们假设 $v_1=v\sin\alpha$，$\quad v_2=v\sin\beta$．

假定光线从空气中 A 处经过 P 点折射到 B 处所用时间为 t_1，从 A 处经过水面 Q 点（非 P 点）到达 B 处的时间为 t_2，哪一种情况所用时间会少一些呢？

∵ $t_1=\frac{AP}{v_1}+\frac{PB}{v_2}=\frac{1}{v}\left[\frac{AP}{\sin\alpha}+\frac{PB}{\sin\beta}\right]$,

$t_2=\frac{1}{v}\left[\frac{AQ}{\sin\alpha}+\frac{QB}{\sin\beta}\right]$,

∴ $t_1-t_2=\frac{1}{v}\left[\frac{AP-AQ}{\sin\alpha}+\frac{PB-QB}{\sin\beta}\right]$.

作 $QQ_1\perp AP$ 于 Q_1，$QQ_2\perp BP$ 于 Q_2.

∵ $AQ>AQ_1$，$BQ>BQ_2$，

∴ $t_1-t_2<\frac{1}{v}\left[\frac{AP-AQ_1}{\sin\alpha}+\frac{BP-BQ_2}{\sin\beta}\right]$,

即 $t_1-t_2<\frac{1}{v}\left[\frac{PQ_1}{\sin\alpha}-\frac{PQ_2}{\sin\beta}\right]$.

∵ $\frac{PQ_1}{\sin\alpha}=PQ$，$\frac{PQ_2}{\sin\beta}=PQ$，

∴ $t_1-t_2<0$.

即 $t_1<t_2$.

原来光走“折”路，绝顶聪明！

由此可知，光所走折路用时最短！

我们可以利用不等式解释生活中的一些现象，一些复杂的数量关系，也可以通过不等式来沟通．走进不等式吧，让我们共同体验数学的无穷魅力！

10.1 不等式的基本性质

某一天，甲乙两城市的温度分别为零上 a 摄氏度和 b 摄氏度，据气象台当晚预报：甲乙两城市会同时受到冷空气影响，气温同时下降 b 度．若气象台还预报了：

(1) 甲地气温零摄氏度以上；

(2) 甲地气温零摄氏度；

(3) 甲地气温零摄氏度以下．

这三种情况中的一种，则你能了解甲乙两地温度间的差异吗？

用数学式子描述甲地气温三种可能的预报同甲乙两地温度差异之间的对应关系．我们得到：

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0$$
$$a=b \Leftrightarrow a-b=0$$
$$a<b \Leftrightarrow a-b<0$$

"$A \Leftrightarrow B$"表示：若有 A 则有 B，且若有 B 则有 A．

由此可见，要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了．如要证明 $x \leqslant a$，只须证明 $x-a \leqslant 0$ 即可．

符号"$\leqslant$"表示："$<$"或"$=$"．

例 1 如果 $a>0$ 且 $a>b$，比较 $\dfrac{b}{a}$ 与 $\dfrac{b+2}{a+2}$ 的大小．

解 ∵ $\dfrac{b}{a}-\dfrac{b+2}{a+2}=\dfrac{2(b-a)}{a(a+2)}$，

又 $a>0$，且 $a>b$，得 $a(a+2)>0$，$b-a<0$．

∴ $\dfrac{2(b-a)}{a(a+2)}<0$， $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+2}{a+2}$．

思考：(1) 将结论 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+2}{a+2}$ 与条件中 $a>b$ 交换，命题是否成立？

(2) 若 $a>0$，且 $a>b$，$m>0$，能否比较 $\dfrac{b}{a}$ 与 $\dfrac{b+m}{a+m}$ 的大小？你是否有什么发现？

例 2 比较 $(a+1)^2$ 与 a^2-a+1 的值的大小．

解 由 $(a+1)^2-(a^2-a+1)=3a$，得

当 $a>0$ 时，$(a+1)^2>a^2-a+1$；

当 $a=0$ 时，$(a+1)^2=a^2-a+1$；

当 $a<0$ 时，$(a+1)^2<a^2-a+1$．

对含有字母的式子进行大小比较，往往要对字母分类讨论．

练　习

1. 比较$(x-5)(x-7)$与$(x-6)^2$的大小.
2. 比较$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$与$(a^2+a+1)(a^2-a+1)$的大小.

下面是高二(1)班小周和小罗的一些对话或有关他们的描述：

(1) 小周对小罗说："我体重不比你轻."小罗对小周说："我体重同样也不比你轻."这有可能吗？

(2) 小周对小罗说："我比小李高."小罗对小周说："小李比我高."你知道他们哪一个高吗？

(3) 现在，小周比小罗的年龄要大，若干年后，小周比小罗还大吗？

(4) 现在，小周比小罗高，假定他们在一年中身高增长的百分数相同，一年后，小周比小罗还高吗？

(5) 小周与小罗同时参加学校田径运动会的同一个短跑比赛，若小周比小罗跑得快，他们哪一个比赛用时会少一些呢？

通过对上述问题的探讨，你肯定很快可以得到一些结论. 请你将所得结论用数学语言进行表述，并加以完善.

上述问题结论的数学抽象就是不等式的五个基本性质.

性质1　如果$a\leqslant b$，且$b\leqslant a$，那么$a=b$.

证明　$\because$　$a\leqslant b$，　$\therefore$　$a-b\leqslant 0$.

$\because$　$b\leqslant a$，　$\therefore$　$a-b\geqslant 0$.

$\therefore$　$a-b=0$，即　$a=b$.

性质2　如果$a>b$，且$b>c$，那么$a>c$.

典型的根据定义作证明的方法.

证明　$\because$　$a>b$且$b>c$，$\therefore$　$a-b>0$且$b-c>0$.

由于两个正数的和是正数，得$a-c=(a-b)+(b-c)>0$，即$a>c$.

性质3　如果$a>b$，那么$a+c>b+c$.

证明 ∵ $a>b$，∴ $a-b>0$.

于是，$(a+c)-(b+c)=a-b>0$，即 $a+c>b+c$.

思考：若 $a>b$，且 $c>d$，则 $a+c$ 与 $b+d$ 的大小关系如何？$a-d$ 与 $b-c$ 的大小关系又如何？

性质 4 设 $a>b$，

若 $c>0$，则 $ca>cb$；

若 $c<0$，则 $ca<cb$.

证明 ∵ $a>b$，∴ $a-b>0$. 又∵ $ca-cb=c(a-b)$，于是，若 $c>0$，则 $ca-cb>0$，即 $ca>cb$；

若 $c<0$，则 $ca-cb<0$，那么 $ca<cb$.

思考：(1) 若 $a>b$，且 $c>0$，则 $\frac{a}{c}$ 与 $\frac{b}{c}$ 的大小关系如何？

(2) 若 $a>b>0$，且 $c>d>0$，则 ac 与 bd 的大小关系如何？

性质 5 如果 $a>b$，且 a，b 同号，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

证明 ∵ $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，又 $a>b$，且 a，b 同号，即 $b-a<0$，$ab>0$，∴ $\frac{b-a}{ab}<0$， $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

这些是不等式的最基本的 5 个性质，这些性质的证明都采用了同样的方法，即根据大小关系的定义，作差后同 0 比大小，这种根据定义作证明的方法是数学证明的重要方法之一.

不等式的证明还有其他一些方法.

例 3 试证：如果 $a>b>0$，且 $d>c>0$，那么 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

证明 由 $d>c>0$ 和性质 5，得 $\frac{1}{c}>\frac{1}{d}>0$，又由 $a>0$ 和性质 4，得 $\frac{a}{c}>\frac{a}{d}$，又 $a>b>0$ 和性质 4，得 $\frac{a}{d}>\frac{b}{d}$，再由性质 2，得 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

利用不等式的性质证明不等式.

例 4 试证：如果 $a>b>0$，那么 $a^2>b^2$.

证法一 ∵ $a>b>0$，∴ $a-b>0$，且 $a+b>0$. 于是 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)>0$，即 $a^2>b^2$.

证法二 由 $a>b>0$ 和函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，可得 $a^2>b^2$.

探究：若 $a>b>0$，n 为正整数，则 a^n 与 b^n 大小关系怎样？

利用函数的单调性证明不等式.

如果 $a>b$，那么 $a^2>b^2$ 是真命题吗？

练　习

1. 判断下列命题的真假，并说明理由：

(1) 若 $a>b$，则 $ca>cb$；　　(2) 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$.

2. 回答下列问题：

(1) 若 $a>b$，且 $c>d$，能否判断 $a-c$ 与 $b-d$ 的大小？为什么？

(2) 若 $a>b$，且 $c>d$，能否判断 ac 与 bd 的大小？为什么？

3. 求证：

(1) 若 $a>b>0$，且 $c>d>0$，则 $ac>bd$；

(2) 若 $a>b$，且 a，b 同号，$c>0$，那么 $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$.

习题 1

学而时习之

1. 比较 $(x+2)(x-6)$ 与 $(x-2)^2$ 的大小.

2. 比较下列各题中两个代数式值的大小.

(1) $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1；　　(2) $(\sqrt{m}-1)^2$ 与 $(\sqrt{m}+1)^2$.

3. 如果 $a<b<0$，则有（用“>”或“<”号填空）：

(1) $-a$ ____ $-b$；　　(2) $\frac{1}{a}$ ____ $\frac{1}{b}$；

(3) a^2 ____ b^2；　　(4) $\frac{b}{a}$ ____ 1.

4. 下列结论是否成立，若成立，请说明理由；若不成立，试举出反例.

(1) 如果 $c-a>c-b$，那么 $a<b$；

(2) 若 $ab>c$，$b>0$，则 $a>\frac{c}{b}$；

(3) 若 $ac>bc$，则 $a>b$；

(4) 若 $a>b$，$c>d$，则 $a-c>b-d$.

5. 选择题：

(1) 如果 $a>b>0$，那么下列不等式中不正确的是（　　）

(A) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(B) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

(C) $ab>b^2$　　(D) $a^2>ab$

(2) 如果 $a>b$，那么下列不等式中正确的是（　　）

(A) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(B) $a^2>b^2$

(C) $ac>bc$　　(D) $-2a<-2b$

温故而知新

6. 设 $x>1$，比较 x^3 与 x^2-x+1 的大小.

7. 利用不等式的性质证明下列不等式.

(1) 若 $a>b$，$c<0$，则 $(a-b)c<0$；

(2) 若 $a>b>0$，$c<d<0$，则 $ac<bd$；

(3) 若 $a<0$，$-1<b<0$，则 $a<ab^2<ab$.

10.2 一元二次不等式

许多实际问题都可以归结为解不等式. 例如，我们国家为了加强对烟酒生产的宏观管理，除了应交税收外，还征收附加税. 已知某种酒每瓶销售价为 70 元，不收附加税时，每年大约销售 100 万瓶；若每销售 100 元要征附加税 x 元（叫作税率 $x\%$），则每年的销售量将减少 $10x$ 万瓶. 如果要使每年在此项经营中所收取的附加税额不少于 112 万元，那么 x 应怎样确定？

销售额等于销售价乘以销售量；附加税额等于销售额乘以税率.

数学建模：通过分析，得到

$$70(100-10x)\frac{x}{100}\geqslant 112 \qquad (0<x\leqslant 10).$$

这就是一个一元二次不等式(quadratic inequality of one variable)，怎

数形结合，看图说话.

样求上面不等式的解集呢？

解决方案：初中阶段，我们学习过二次函数，能否通过二次函数图象，求解一元二次不等式？

一元二次方程、一元二次不等式与二次函数之间究竟具有怎样的关系？让我们先看一个例子.

二次函数 $y=x^2-10x+16$ 的图象如图 10-2.

当 $x=2$，或 $x=8$ 时，$y=0$，即 $x^2-10x+16=0$；

当 $x<2$，或 $x>8$ 时，$y>0$，即 $x^2-10x+16>0$；

当 $2<x<8$ 时，$y<0$，即 $x^2-10x+16<0$.

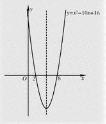


图 10-2

由此可知，通过二次函数的图象可以确定对应的一元二次方程的解和对应的一元二次不等式的解集.

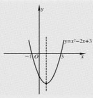


图 10-3

例 1 解不等式 $x^2-2x-3>0$.

解 函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象如图 10-3 所示，方程 $x^2-2x-3=0$ 有两根 $x=-1$ 和 $x=3$. 当 $x<-1$ 或 $x>3$ 时，函数的图象在 x 轴上方，因此，不等式 $x^2-2x-3>0$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

例 2 解不等式 $-x^2+4x-5>0$.

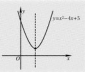


图 10-4

解 由 10.1 节不等式的性质 4，原不等式两边同乘 -1，改变不等号的方向，因此我们只需解不等式 $x^2-4x+5<0$. $x^2-4x+5=0$ 的判别式 $\Delta=16-20=-4<0$，函数 $y=x^2-4x+5$ 的二次项系数大于 0，函数图象（如图

10-4)位于 x 轴的上方，因此，不等式 $x^2-4x+5<0$ 的解集为空集，即原不等式 $-x^2+4x-5>0$ 的解集为空集.

例 3 解不等式 $x^2-2x+1>0$.

解 方程 $x^2-2x+1=0$ 的判别式

$$\Delta=4-4=0.$$

函数 $y=x^2-2x+1$ 的图象，如图 10-5 所示，与 x 轴仅有一个交点且开口向上，因此不等式 $x^2-2x+1>0$ 的解集为

$$\{x \mid x\in \mathbf{R},\ x\neq 1\}.$$

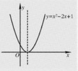


图 10-5

例 1，例 2，例 3 讨论了 Δ 的三种情况，并利用数形结合思想，充分体现了形的直观.

通过以上三个具体例子，可以看出利用二次函数的性质就能解一元二次不等式，关键是看二次函数图象与 x 轴的关系. 下面我们来总结利用二次函数图象解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的步骤.

如果 $a<0$，根据 10.1 节不等式的性质 4，不等式的两边同乘以 -1 并改变不等号的方向. 因此，总可以假定二次项系数 $a>0$.

计算判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

1. 当 $\Delta>0$ 时，先求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根 x_1 和 x_2（不妨设 $x_1<x_2$），二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象（如图 10-6(a)所示），因此，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$；不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $(x_1,\ x_2)$.

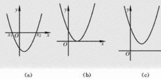


图 10-6

2. 当 $\Delta=0$ 时，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象顶点 $\left(-\frac{b}{2a},0\right)$ 在 x 轴上，其余部分都在 x 轴的上方（如图 10-6(b)所示），因此，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$；不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为空集.

3. 当 $\Delta<0$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象全部位于 x 轴的上方（如图 10-6(c)所示），因此不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-\infty,+\infty)$；不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为空集.

上述方法是一种形数结合的方法，二次函数的图象直观地提供了一种解一元二次不等式的方法.

问题：利用形数结合解一元二次不等式的思想，你能提出解其他类型的不等式的方法吗？

练 习

1. 解下列不等式：

(1) $3x^2-7x+2>0$；　　(2) $-x^2+5x>6$；

(3) $4x^2-4x+1\leqslant 0$；　　(4) $x^2-2x+3\geqslant 0$.

2. 解不等式：$70(100-10x)\frac{x}{100}\geqslant 112$.

利用不等式的基本性质，我们可以把对一些其他不等式的求解转化归结为一元二次不等式的求解.

例 4　解不等式组

$$\begin{cases}3x^2-7x-10\leqslant 0,\\ 2x^2-5x+2>0.\end{cases}$$

分析　解不等式组当然是求出使每个不等式都成立的 x 的值所组成的集合，它应该是每个不等式的解集的交集.

解　方程 $3x^2-7x-10=0$ 的根为 $x=-1$ 和 $x=\frac{10}{3}$，因此，不等式 $3x^2-7x-10\leqslant 0$ 的解集是 $\left[-1,\frac{10}{3}\right]$.

方程 $2x^2-5x+2=0$ 的根为 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=2$，因此，不等式 $2x^2-

$5x+2>0$ 的解集是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$. 把这两个不等式的解集在数轴上表示出来，立刻看出，它们的交集是$\left[-1,\frac{1}{2}\right)\cup\left(2,\frac{10}{3}\right]$，这就是原不等式组的解集.

例 5 解不等式$\frac{x+3}{3x-2}>2$.

分析 由不等式的基本性质 3，原不等式可化为$\frac{x+1}{3x-2}-2=\frac{-5x+5}{3x-2}>0$. 由不等式的基本性质 4，不等式可进一步化为$\frac{x-1}{3x-2}<0$.

解法一 上面这个不等式是不等式组

$$\begin{cases}x-1>0,\\3x-2<0\end{cases} \qquad ①$$

与

$$\begin{cases}x-1<0,\\3x-2>0\end{cases} \qquad ②$$

转化为解一元一次不等式组.

的解集的并集. 由①得 $x\in\varnothing$，由②得 $x\in\left(\frac{2}{3},1\right)$，所以原不等式的解集为$\left(\frac{2}{3},1\right)$.

解法二 因为两个数的商与这两个数的积同号，所以$\frac{x-1}{3x-2}<0$还可化为解不等式$(x-1)(3x-2)<0$，它的解集是$\left(\frac{2}{3},1\right)$，所以，原不等式的解集为$\left(\frac{2}{3},1\right)$.

转化为解一元二次不等式.

想一想：还有其他方法可以解这个不等式吗？

问题：你还能再举出一个例子吗？

练 习

1. 当 $a<b$ 时，解关于 x 的不等式：

(1) $(x-a)(x-b)\leqslant 0$；　　(2) $\frac{x-a}{x-b}\leqslant 0$.

2. 解不等式：$\frac{7x^2+13x-2}{(x+1)(x-2)}>0$.

下面我们研究同解一元二次不等式有联系的问题.

解一元二次不等式的反向思考.

例6 已知不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集为 $(-3,-1)$，求实数 a，b 的值.

解 由一元二次不等式解集的结构知，方程 $x^2+ax+b=0$ 有实根 $x=-3$ 和 $x=-1$，因此，$x^2+ax+b=(x+3)(x+1)=x^2+4x+3$，于是 $a=4$，$b=3$.

解一元二次方程的某种反问题.

例7 当 k 为何值时，关于 x 的方程 $x^2+(k-1)x+4=0$ 无实数根？

解 由一元二次方程根的知识，$x^2+(k-1)x+4=0$ 无实数根的条件是 $\Delta=(k-1)^2-16<0$，即 $-4<k-1<4$，$-3<k<5$，因此，当 $k\in(-3,5)$时，$x^2+(k-1)x+4=0$ 无实数根.

问题：根据这两个例子，你会提出一些问题的反向思考吗？

练　习

1. 求函数 $y=\lg(3x^2-7x+2)$ 的定义域.
2. 当 k 为何值时，关于 x 的方程 $x^2+(k-3)x+k=0$，分别满足：(1) 无实数根？(2) 有两正实根？

复杂抽象的数量关系，可以通过不等式来沟通，可以利用不等式来解决，下面我们来看两个实例.

例8 某工厂生产的 A 型商品进入某劝业场（租赁柜台市场）. 若劝业场对 A 型商品不征收管理费时，A 型商品每件定价 80 元，则每年可销售 8 万件；若劝业场对 A 型商品征收管理费的比率为 $p\%$时（即每销售 100 元时征收 p 元），则 A 型商品的每件价格要提高到

$\frac{80}{1-p\%}$元，售量将减少 $0.62p$ 万件．确定 p 的取值范围，使得劝业场对 A 型商品每年征收的管理费不少于 16 万元．

解 由题意，有 $(8-0.62p)\cdot\frac{80}{1-p\%}\cdot p\%\geqslant 16$.

∵ $1-p\%>0$，整理上式，得

$$31p^2-410p+1\,000\leqslant 0,$$

$$(31p-100)(p-10)\leqslant 0,$$

∴ $$\frac{100}{31}\leqslant p\leqslant 10.$$

例 9 某摩托车生产企业上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元/辆，出厂价为 1.2 万元/辆，年销售量为 1 000 辆．本年度为适应市场需求，计划提高产品档次，适度增加投入成本，若每辆车投入成本增加的比例为 $x(0<x<1)$，则出厂价相应提高的比例为 $0.75x$，同时预计年销售量增加的比例为 $0.6x$，已知年利润＝(出厂价－投入成本)×年销售量．为使本年度的年利润比上年有所增加，投入成本增加的比例 x 应在什么范围内？

解 首先把问题中所有有关的量及其相互关系间的数学式子表示出来．

上年度的利润为 $(1.2-1)\times 1\,000=200$ 万元；

本年度的投入成本为 $1\times(1+x)$；

出厂价为 $1.2\times(1+0.75x)$；

销售量 $1\,000\times(1+0.6x)$，因此，本年度的利润为

$$\begin{aligned}y&=[1.2\times(1+0.75x)-(1+x)]\times 1\,000\times(1+0.6x)\\&=-60x^2+20x+200\quad(0<x<1).\end{aligned}$$

最后，问题归结为解不等式组

$$\begin{cases}-60x^2+20x+200>200,\\0<x<1,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}3x^2-x<0,\\0<x<1.\end{cases}$$

该不等式组的解集是 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$．因此，如果投入成本增加的比例 x 满足 $0<x<\frac{1}{3}$，那么本年度的利润预计比上年度有所增加．

练　习

某船从甲地沿河顺流航行 75 km，到达乙码头，停留 30 min 后再逆流航行 126 km到达丙地，若水流速度为 4 km/h，该船要在 5 h 内完成航行任务，则船的速度至少有多少？

习题 2

学而时习之

1. 解下列不等式：

(1) $x^2-x-6<0$；　　(2) $-2x^2+x-5<0$；

(3) $3x^2+2x+\frac{1}{3}<0$；　　(4) $16-24x\leqslant -9x^2$；

(5) $(x+1)^2-6>0$；　　(6) $x^2+20\geqslant 6x+1$；

(7) $-x^2+4x-4\leqslant 0$；　　(8) $7x^3-1<x(7x-1)(x-1)$.

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}4x^2-27x+18>0,\\ x^2-6x+4<0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3x^2+x-2\geqslant 0,\\ 4x^2-15x+9>0.\end{cases}$

3. 解下列不等式：

(1) $\frac{2}{3-5x}<3$；　　(2) $\frac{2x+4}{x-3}>1$.

温故而知新

4. 已知关于 x 的方程 $3x^2-10x+k=0$ 有两个同号且不相等的实数根，求实数 k 的取值范围.

5. 设关于 x 的不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 的解集为 $(-\infty, +\infty)$，求实数

a 的取值范围.

6. 设不等式 $x^2-16<0$…①和 $x^2-4x+3\geqslant 0$…②.

(1) 求使得不等式①和②同时成立的 x 的取值范围;

(2) 求使得不等式①和②至少有一个成立的 x 的取值范围;

(3) 求使得不等式①和②都不成立的 x 的取值范围.

7. 已知 a 为实数,解下列关于 x 的不等式:

(1) $x^2-2ax-3a^2<0$; (2) $3a^2x^2-2ax-1<0$.

8. 某产品生产厂家根据以往的生产销售经验得到下面有关生产销售的统计:每生产产品 x(百台),其总成本为 $G(x)$万元,$G(x)=2+x$;销售收入 $R(x)$(万元)满足:

$R(x)=\begin{cases}-0.4x^2+4.2x-0.8, & (0\leqslant x\leqslant 5),\\ 10.2, & (x>5).\end{cases}$ 要使工厂有赢利,产量 x 应控制在什么范围?

10.3 基本不等式及其应用

某公司设计如图 10-7 所示的一块绿化景观地带,这块绿化景观地带的内圈周长为 400 m,两条平行直线的两端用半圆形弧相连接,两条平行线段的长为 100 m. 这样的设计有什么好处呢?你能举出做这样设计的一个理由吗?为了解决这个谜团,我们有必要先掌握一些恒成立的基本不等式. 例如:$x^2\geqslant 0$ 恒成立. 请同学们尝试一下,如果把 x 用 $a-b$ 替代,你会有什么发现呢?

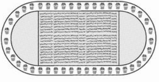


图 10-7

定理1 对任意实数 a，b，必有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立）.

证明 ∵ $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$，

∴ $a^2+b^2\geqslant 2ab$. 等号成立当且仅当 $(a-b)^2=0$，即 $a=b$.

定理2 如果 a，b 是正实数，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立）.

证法一 ∵ $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0,$$

因此，$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，等号成立当且仅当 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$，即 $a=b$.

称 $\frac{a+b}{2}$ 为正数 a 和 b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 为正数 a 和 b 的几何平均数.

两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

证法二 由定理1可得

$$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geqslant 2\sqrt{a}\sqrt{b}\Rightarrow a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

证法三 如图10-8所示，取长为 $a+b$ 的线段 AB，O 为 AB 的中点，在 AB 上取点 C，使 $AC=a$，作以 AB 为直径的圆，过点 C 作 $CD\perp AB$ 交上半圆于 D，连接 AD 和 BD.

几何证法有一定技巧，仅供欣赏.

∵ AB 是直径，D 在半圆弧上，

∴ $\angle ADB=90°$.

∵ $DC\perp AB$，

∴ $\angle ADC=\angle CBD$，$\angle CAD=\angle CDB$，

于是 $\triangle ACD\backsim\triangle DCB$，$\frac{CD}{CB}=\frac{CA}{CD}$，$CD=\sqrt{ab}$.

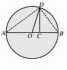


图10-8

∵ OD 是圆的半径，

∴ $OD=\frac{a+b}{2}$. 由于 OD 是直角三角形 OCD 的斜边，故 $OD\geqslant CD$，即 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当点 C 和点 O 重合时，$OD=CD$ 成立，即 $a=b$.

定理1和定理2中的不等式通常称为基本不等式（Basic Inequalities）.

例 1 已知 a 和 b 为实数，求证 $a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

证法一 ∵ $a^2+b^2-\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{2a^2+2b^2-(a+b)^2}{2}$

$$=\frac{a^2+b^2-2ab}{2}=\frac{(a-b)^2}{2}\geqslant 0,$$

∴ $a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$.

等号成立当且仅当 $(a-b)^2=0$，即 $a=b$.

证法二 ∵ $\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{a^2+b^2+2ab}{2}$，

根据定理 1，$2ab\leqslant a^2+b^2$，因此，

$$\frac{(a+b)^2}{2}\leqslant\frac{2a^2+2b^2}{2}=a^2+b^2.$$

根据定理 1，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

这两种证明思路有较大的差异，证法一采用了比较法证不等式；证法二是利用了基本不等式作为基础，再采用不等式的性质推导所要求证的结论，这种证题方法通常叫作综合法.

例 1 为定理 1 的一种变形.

例 2 对任意三个正实数 a，b，c，求证：

$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

证明 ∵ a，b，$c\geqslant 0$，∴ $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$，$c+a\geqslant 2\sqrt{ca}$，把上述三个式子的两边分别相加，得

$$2(a+b+c)\geqslant 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}),$$

∴ $a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

等号成立当且仅当 $a=b$，且 $b=c$ 和 $c=a$，即必须 $a=b=c$.

试一试：对任意三个正实数 a，b，c，你还能写出哪些结论，能给出证明吗？

练 习

1. 已知 x，y 都为正数，求证：$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2$.

2. 已知 a，b，c 均为正实数．试证：$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$．

基本不等式可以用来求某些函数的最值．

例 3 已知 x，y 都为正数，求证：

这是利用基本不等式求最值的理论依据．

(1) 如果积 xy 是定值 p，那么当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$；

(2) 如果和 $x+y$ 是定值 s，那么当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{s^2}{4}$．

证明 ∵ x，y 都为正数，∴ $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$．

(1) 积 xy 是定值 p，$x+y\geqslant 2\sqrt{p}$，当且仅当 $x=y$ 时等号成立，因此，当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$．

(2) 和 $x+y$ 是定值 s，$\sqrt{xy}\leqslant\frac{s}{2}\Rightarrow xy\leqslant\frac{s^2}{4}$，当且仅当 $x=y$ 时等号成立，因此，当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{s^2}{4}$．

例 4 求函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}(x>0)$ 的最小值．

想一想：函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 有最小值吗？

解 ∵ $x>0$，利用定理 2 得 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时等号成立． ∴ 函数的最小值为 2．

例 5 求函数 $f(x)=\sqrt{x(1-x)}(0<x<1)$ 的最大值．

解 ∵ $0<x<1$，∴ $x>0$，$1-x>0$，利用定理 2，$\sqrt{x(1-x)}\leqslant\frac{x+(1-x)}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $x=1-x$，即 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{x(1-x)}=\frac{1}{2}$，因此，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，函数取到最大值，其最大值 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$．

在使用基本不等式求函数的最值时，以下几点特别要加以注意：

利用基本不等式求函数的最值时，要注意"一正，二定，三相等．"

1. 使用定理 2 时要注意条件，涉及的量为正实数；

2. 不等式的一边应当是一个常数；

3. 等号成立时自变量的值必须在函数的定义域内，以保证得到的常数在函数的值域中．

一旦这三个条件中有一个不能被满足，用基本不等式求函数最值的方法就会失效，这时，要考虑用其他的方法来求函数的最值.

练 习

1. 求函数 $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ $(x>1)$ 的最小值.
2. 求函数 $f(x)=(1+x)\cdot x^2\cdot(1-x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的最大值.

日常生活中，我们经常会遇到如何使材料最省，利润最高，成本最低等问题，这些问题一般可借助基本不等式来处理.

例6 动物园要建造一面靠墙的2间面积相同的长方形熊猫居室（如图10-9）. 如果可供建造围墙的材料长是30米，那么宽 x 为多少米时才能使所建造的熊猫居室面积最大？最大面积是多少平方米？

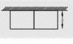


图 10-9

解 设每间熊猫居室的宽为 x 米，熊猫居室的总面积为 y 平方米，则2间熊猫居室的总长为$(30-3x)$米.

$y=x(30-3x)$ $(0<x<10)$.

$\because$ $0<x<10$,

$\therefore$ $3x>0, 30-3x>0$.

$$y=\frac{1}{3}\times 3x(30-3x)\leqslant\frac{1}{3}\left[\frac{3x+(30-3x)}{2}\right]^2=\frac{225}{3}=75.$$

当且仅当 $3x=30-3x$，即 $x=5$ 时，$3x(30-3x)=225$，因此，当熊猫居室的宽为5米时，它的面积最大，最大面积为$\frac{225}{3}=75$平方米.

例7 某空调公司的送气管道的截面（指横截面，下同）为矩形，设它的周长为定值 $2L$. 当气流速度相同时，试问：怎样设计截面可使管道气流量最大？

想一想：通过管道送气，当气流速度相同时，如果管道截面（指横截面，下同）的周长相等，那么截面为圆的管道比截面为正方形的管道气流量大吗？

证明 设截面的长和宽分别为 a 和 b，其中 $a, b>0$，则其面积 $S=ab$，而 $a+b=L$．由定理2，$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，即 $S=ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{L^2}{4}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，因此，当 $a=b$ 时，S 取最大值，即截面设计为正方形时管道气流量最大．

下面我们接着来探讨本节开头提出的绿化景观地带（如图10-7）的设计理由之一：面积最大问题．当内圈周长为 400 m 时，如何设计平行线段的长才能使中间的矩形区域面积最大？

解 设线段长为 x 米，半圆形直径为 d 米，中间的矩形区域面积为 S 平方米．

由题意可知：$S=dx$，　且　$2x+\pi d=400$，

$\therefore\quad S=\frac{1}{2\pi}\cdot(\pi d)\cdot(2x)\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi d+2x}{2}\right)^2=\frac{20\ 000}{\pi}$．

当且仅当　$\pi d=2x=200$，　即　$x=100$ 时等号成立．

因此，当线段长为 100 米时，中间矩形区域的面积 S 最大．

由此可知，某公司的绿化景观地带的设计有其内在的数学理由，至于是否还有其他理由，是否可以做出更合理、更美观的设计，请同学们课后继续探讨．

多知道一点

n 个正数的算术平均数与几何平均数

我们知道，如果 a，b 为正数，那么

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

当且仅当 $a=b$ 时上式取"="号．

上面的结论能否推广到三个正数的情形，即若 a，b，c 为正数，是否必有 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$ 呢？

为了解决这一问题，我们先令 $a=x^3$，$b=y^3$，$c=z^3$. 则上述问题就转化为：若 x，y，z 为正数，是否必有 $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geqslant xyz$.

我们先比较 x^3+y^3 与 x^2y+xy^2 的大小.

$$\begin{aligned}x^3+y^3-(x^2y+xy^2)&=(x^3-x^2y)+(y^3-xy^2)\\&=x^2(x-y)+y^2(y-x)\\&=(x-y)(x^2-y^2)\\&=(x-y)^2(x+y).\end{aligned}$$

∵ x，y 为正数，

∴ $x^3+y^3-(x^2y+xy^2)\geqslant 0$.

即 $$x^3+y^3\geqslant x^2y+xy^2. \quad ①$$

同理可得 $$y^3+z^3\geqslant y^2z+yz^2, \quad ②$$

$$z^3+x^3\geqslant z^2x+zx^2. \quad ③$$

将①、②、③式两边分别相加，得

$$\begin{aligned}2(x^3+y^3+z^3)&\geqslant x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2\\&=(x^2y+yz^2)+(xy^2+z^2x)+(y^2z+zx^2)\\&=y(x^2+z^2)+x(y^2+z^2)+z(y^2+x^2)\\&\geqslant y\cdot 2xz+x\cdot 2yz+z\cdot 2xy\\&=6xyz.\end{aligned}$$

∴ $x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz$，即 $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geqslant xyz$.

显然，当且仅当 $x=y=z$ 时，上式等号成立.

∵ $x^3=a$，$y^3=b$，$z^3=c$，

∴ $$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}. \quad ④$$

显然，当且仅当 $a=b=c$ 时上式的等号成立.

我们也把 $\frac{a+b+c}{3}$，$\sqrt[3]{abc}$ 分别叫作三个正数 a，b，c 的算术平均数与几何平均数.

于是，④式可以说成：三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

一般地，对于 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n\geqslant 2)$，我们把 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$分别叫作这 n 个正数的算术平均数与几何平均数，这时有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

这个不等式通常叫作平均数不等式，你能给出证明吗？

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立．于是，对任意正整数 n，n 个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数．

练 习

通过一定长的管道送气，当气流速度相同时，如果管道截面为矩形，且气流量相同，那么怎样设计可使送气管道用料最省？

习题 3

学而时习之

1. 证明下列不等式，并讨论等号成立的条件：

(1) 若 $a>0$，则 $a+a^3\geqslant 2a^2$；

(2) 若 $ab=4$，则 $a^2+b^2\geqslant 8$；

(3) 若 $-1\leqslant x\leqslant 1$，则 $\sqrt{x^2(1-x^2)}\leqslant\frac{1}{2}$；

(4) 若 $ab\neq 0$，则 $\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geqslant 2$；

(5) 对任意实数 a 和 b，$a^2+b^2+\frac{4}{a^2+b^2+1}\geqslant 3$.

2. 求函数 $f(x)=x(1-2x)\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$ 的最大值.

3. 求函数 $f(x)=x+\frac{1}{x+1}(x>-1)$ 的最小值.

4. 求函数 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的最大值.

温故而知新

5. 某商品计划两次提价，有甲、乙、丙三种方案，其中 $p>q>0$. 经两次提价后，哪种方案提价的幅度大？为什么？

次 方案	第一次提价	第二次提价
甲	$p\%$	$q\%$
乙	$q\%$	$p\%$
丙	$\left(\frac{p+q}{2}\right)\%$	$\left(\frac{p+q}{2}\right)\%$

6. 甲、乙两人同时从 A 地出发，沿同一条线路步行到 B 地. 甲在前一半时间的行走速度为 a，后一半时间的行走速度为 b；乙用速度 a 走完前半段路程，用速度 b 走完后半段路程. 若 $a\neq b$，问甲、乙两人谁先到达 B 地.

7. 下列结论是否成立？若成立，请说明理由；若不成立，试找出反例.

(1) 若 $ab>0$，则 $a^2+b^2>2ab$；　(2) 若 $ab>0$，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$；

(3) 若 $ab>0$，则 $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\geqslant 2$；　(4) 若 $ab<0$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leqslant -2$；

(5) 函数 $y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值为 2；

(6) 函数 $y=2-3x-\frac{4}{x}$ $(x>0)$ 的最大值为 $2-4\sqrt{3}$.

8. 某工厂建造一个长方体无盖贮水池，其容积为 4 800 m^3，深度为 3 m，如果池底每 1 m^2 的造价为150元，池壁每 1 m^2 的造价为120元，怎样设计水池能使总造价最低，最低总造价需要多少元？

9. 现在要求设计一张单栏的竖向张贴的海报，它的印刷面积 128 dm^2，上下空白各 2 dm，两边空白各 1 dm，如何确定海报尺寸可使四周空白面积为最小？

10. 通过大量的观察，人们总结一个描述通过某隧道的平均车速 v（千米/时）与车流量 $f(v)$（辆/秒）关系的经验函数：

$$f(v)=\frac{36.8v}{1.6v+\frac{v^2}{22}+49.5}.$$

问平均车速 v 多大时，车流量 $f(v)$ 最大？最大车流量是多少？

10.4 简单线性规划

在生产管理和各种经营活动中经常提出一类问题，如何合理地使用有限的人力、物力、财力等资源，以便得到最好的经济效果.

实际情境：某厂拟生产甲、乙两种适销产品，每件销售收入分别为3千元、2千元，甲、乙产品都需要在A、B两种设备上加工，在设备A、B上加工一件甲产品所需工时分别为1小时、2小时，加工一件乙产品所需工时分别为2小时、1小时. A、B两种设备每月有效使用工时数分别为400和500，如何安排生产可使收入最大？

数学建模：设甲、乙两种产品每月的产量分别为x件、y件，每月的销售收入为z千元，由题意，$z=3x+2y$，这个函数称为线性目标函数（linear objective function）. 在x，y满足一定的限制条件下，线性目标函数$z=3x+2y$何时能取最大值？由题意，设备A每月有效使用工时数为400，加工x件甲产品需要工时数x，加工y件乙产品需要工时数$2y$，因此，$x+2y\leqslant 400$；同样，考虑设备B得$2x+y\leqslant 500$；当然，x和y还必须满足条件$x\geqslant 0$和$y\geqslant 0$（为求解方便起见，我们暂时忽略x，y必须是自然数的条件，而代之于$x\geqslant 0$和$y\geqslant 0$的条件），这些条件称为x，y需要满足的线性约束条件（linear constraint condition）. 于是，这个问题的数学模型是：

在自变量x，y满足约束条件

$$\begin{cases}x+2y\leqslant 400,\\ 2x+y\leqslant 500,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0\end{cases}$$

的情况下，求目标函数$z=f(x,y)=3x+2y$的最大值.

解决方案：分三步.

第一步：我们先研究二元一次不等式$x+2y\leqslant 400$表示的平面区域.

方程 $x+2y=400$ 的解集表示一条直线 l：$x+2y-400=0$，如图10-10. 一条垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$ 同直线 l：$x+2y=400$ 交于点 $P(x_0, y_0)$，当点 P 沿直线 $x=x_0$ 向上移动到点 $B(x_0, y_1)$ 时，必有 $y_1>y_0$，则 $x_0+2y_1-400>x_0+2y_0-400=0$；当点 P 沿直线 $x=x_0$ 向下移动到点 $C(x_0, y_2)$ 时，必有 $y_2<y_0$，则 $x_0+2y_2-400<x_0+2y_0-400=0$. 由此看出，直线 l：$x+2y-400=0$ 把平面分成两部分，不等式 $x+2y>400$ 的解集是以直线 l 为边界（不含边界）的上半平面，而不等式 $x+2y\leqslant 400$ 的解集是以直线 l 为边界（含边界）的下半平面.

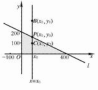


图 10-10

一般地，直线 l：$ax+by+c=0$ 把平面分成两部分，当 $b>0$ 时，不等式 $ax+by+c\geqslant 0$ 的解集是以直线 l 为边界（含边界，此时 l 画成实线）的上半平面，而不等式 $ax+by+c<0$ 的解集是以直线 l 为边界（不含边界，此时 l 画成虚线）的下半平面；当 $b=0$ 时，直线 l 可化为：$x=-\frac{c}{a}$，不等式 $x>-\frac{c}{a}$ 的解集是以直线 l 为边界（不含边界，此时 l 画成虚线）的右半平面，不等式 $x\leqslant-\frac{c}{a}$ 的解集是以直线 l 为边界（含边界，此时 l 画成实线）的左半平面.

注意，当 $b<0$ 时，利用不等式性质4，不等式 $ax+by+c\geqslant 0$ 可变为 $-ax-by-c\leqslant 0$，使 y 项的系数大于0.

第二步：研究具体的二元一次不等式组的解集所表示的平面图形.

判定二元一次不等式具体表示哪一个半平面，通常可以利用特殊点来确定，如原点.

例1 求二元一次不等式组

$$\begin{cases} x+2y\leqslant 400, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

的解集所描述的多边形.

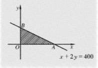


图 10-11

解 如图10-11，直线 $x+2y-400=0$

与 x 轴交于点 $A(400, 0)$，同时与 y 轴交于点 $B(0, 200)$，因此，原不等式组的解集就是 $\triangle ABO$ 的内部及其边界.

例 2 求二元一次不等式组

$$\begin{cases} x+2y\leqslant 400, \\ 2x+y\leqslant 500, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

的解集所描述的多边形.

解 将不等式组中的前面二个不等式改写为 $x+2y-400\leqslant 0$ 和 $2x+y-500\leqslant 0$. 在平面直角坐标系内（如图 10-12）作直线 l_1：$x+2y-400=0$ 和 l_2：$2x+y-500=0$. 直线 l_1 和 y 轴交于点 $C(0, 200)$，且与直线 l_2 交于点 $B(200, 100)$；直线 l_2 与 x 轴交于点 $A(250, 0)$. 因此，约束条件描述四边形 $OABC$ 的内部及其边界（如图 10-12 中的阴影部分）.

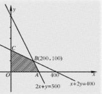


图 10-12

第三步：研究当点 $P(x,y)$ 满足约束条件

$$\begin{cases} x+2y\leqslant 400, \\ 2x+y\leqslant 500, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

时，求目标函数 $f(x,y)=3x+2y$ 的最大值.

解 在平面直角坐标系内，如图 10-13，由第二步可知：约束条件描述四边形 $OABC$ 的内部及其边界（如图 10-13 中的阴影部分）.

考虑直线 $3x+2y=a$，其中 a 是参数，这是一条斜率为 $-\frac{3}{2}$，在 y 轴上的截距为 $\frac{a}{2}$ 的直线，且对这条直线上的每一点 $P(x, y)$，函数 $f(x, y)=3x+2y$ 取值就是 a. 当参数 a 变化时，直线跟着变化，形

成一族互相平行的直线，这就是说，所有这样的直线可由直线 $3x+2y=0$ 平行移动得到. 当直线 $3x+2y=0$ 向右上方平行移动时，在 y 轴上的截距同时在增大，因此 a 的值也在增大，在保证移动后的直线同四边形 $OABC$ 的内部及其边界有交点的情况下，通过观察，直线 $3x+2y=0$ 向右上方平行移动，在 y 轴上的截距最大的一条是过点 B 的直线. 点 B 的坐标是 $B(200, 100)$，因此，在这个问题中，当 $x=200$，$y=100$ 时，函数 $f(x, y)=3x+2y$ 取到自变量满足约束条件下的最大值，即最大值是 800.

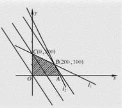


图 10–13

一般地，求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题，统称为线性规划 (linear programming). 满足线性约束条件的解 (x, y) 叫作可行解 (feasible solution)，由所有可行解组成的集合叫作可行域 (feasible region). 在上述问题中，可行域就是阴影部分表示的四边形区域，其中可行解 $B(200,100)$ 使目标函数取得最大值，我们把它叫作这个问题的最优解 (optimal solution).

生产实际中有许多问题都可归结为线性规划问题. 上述问题的处理方法，对一般的线性规划问题同样有效.

设二元一次函数 $z=f(x, y)$，$(x, y)\in D$，其中 D 是平面图形. 作直线 $f(x, y)=0$，平行移动该直线得一族直线 $f(x,y)=a$，保证平行移动后的直线与平面图形 D 有交点，通过观察，可以发现 a 的最大值和最小值，以及函数在哪些点上取到最大值和最小值，这种求解的方法称为**图解法**.

例 3 靠近某河流有两个化工厂（如图 10–14），流经第一化工厂的河流流量为 500 万立方米/天，在两个工厂之间有一条流量为 200 万立方米/天的支流. 第一化工厂每天排放含有某种有害物质的工业废水 2 万立方米，第二化工厂每天排放这种工业废水 1.4 万立方米，

从第一化工厂排出的工业废水流到第二化工厂之前，有20%可自然净化. 根据环保要求，河流中工业废水的含量应不大于0.2%，因此，这两个工厂都需各自处理一部分工业废水. 第一化工厂处理工业废水的成本是1 000元/万立方米，第二化工厂处理工业废水的成本是800元/万立方米，现在要问在满足环保要求的条件下，每厂各应处理多少工业废水，才使这两个工厂总的处理工业废水费用最小?

图 10-14

解 设第一化工厂每天处理工业废水 x 万立方米，第二化工厂每天处理工业废水 y 万立方米，于是，这两个工厂每天处理工业废水的费用为 $1\,000x+800y$. 根据环保要求，从第一化工厂到第二化工厂之间，河流中工业废水的含量不能大于0.2%，由第一化工厂每天要排放工业废水2万立方米，处理掉 x 万立方米，河流流量为500万立方米，得$\frac{2-x}{500}\leqslant 0.2\%$. 流经第二化工厂后，第一化工厂排放的工业废水仍有$0.8(2-x)$万立方米，第二化工厂排放的工业废水有$(1.4-y)$万立方米，河流流量为700万立方米，得$\frac{0.8(2-x)+(1.4-y)}{700}\leqslant 0.2\%$，于是，这个问题的数学模型是：在约束条件

$$\begin{cases}\dfrac{2-x}{500}\leqslant 0.2\%,\\ \dfrac{0.8(2-x)+(1.4-y)}{700}\leqslant 0.2\%,\\ 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0\leqslant y\leqslant 1.4\end{cases}$$

之下，求目标函数 $f(x,y)=200(5x+4y)$ 的最小值.

约束条件可以化简为：

$$\begin{cases}4x+5y\geqslant 8,\\ 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0\leqslant y\leqslant 1.4.\end{cases}$$

直线 $4x+5y=8$ 同 x 轴交于点 $B(2,0)$，同直线 $x=1$ 交于点 $A(1,0.8)$，C，D 两点的坐标分别为 $C(2,1.4)$ 和 $D(1,1.4)$，约束条件描述了平面上的四边形 $ABCD$ 的内部及其边界（如图 10-15），目标函数 $f(x,y)=200(5x+4y)$ 在四个顶点 A，B，C，D 上分别取值 1 640，2 000，3 120 和 2 120. 因此，当 $x=1$，$y=0.8$ 时，函数 $f(x,y)=200(5x+4y)$ 在约束条件下取到最小值1 640.

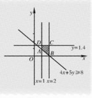


图 10-15

解答线性规划问题的一般步骤：
①设（设出两个变元 x，y）；
②找（找约束条件）；
③画（画可行域）；
④移（平移直线）；
⑤求（求最优解）；
⑥答（作出答案）.

于是，第一化工厂每天处理工业废水 1 万立方米，第二化工厂每天处理工业废水 0.8 万立方米时，两个工厂处理工业废水的总费用最小.

练 习

1. 画出下列不等式表示的平面区域.

(1) $x+2>0$；　(2) $x+y-1<0$；　(3) $x-2y\leqslant 4$.

2. 画出不等式组 $\begin{cases}x+y-5\leqslant 0,\\x+y\geqslant 0,\\x\leqslant 3\end{cases}$ 表示的平面区域.

3. 已知 $\begin{cases}3x-2y-2\leqslant 0,\\x-2y+2\geqslant 0,\\x\geqslant \dfrac{2}{3},\\y\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $z=x+y$ 的最大值和最小值.

4. 咖啡馆配制两种饮料，甲种饮料每杯含奶粉 9 g、咖啡 4 g、糖 3 g；乙种饮料每杯含奶粉 4 g、咖啡 5 g、糖 10 g. 每天原料的使用限额为奶粉 3 600 g、咖啡 2 000 g、糖 3 000 g. 如果甲种饮料每杯能获利 0.7 元，乙种饮料每杯能获利 1.2 元，每天在原料使用限额内饮料全部售出，每天应配制两种饮料各多少杯能获利最大？

习题 4

学而时习之

1. 试画出下列不等式的解集描述的平面图形.

(1) $y\geqslant 2x-3$；　(2) $x+2y>0$；

(3) $x-y-3<0$；　(4) $x\leqslant 4y-4$.

2. 试画出下列不等式组的解集描述的平面图形.

(1) $\begin{cases}x+y\leqslant 2,\\ 1\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}-2\leqslant y\leqslant 0,\\ 2x-y-2\leqslant 0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}y\leqslant 2,\\ y-x\geqslant 0,\\ y+x\geqslant 0;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}x+3y-3\geqslant 0,\\ 2x+3y-6\leqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$

3. 当 x，y 满足 $\begin{cases}y\leqslant 2,\\ y-x\geqslant 0,\\ y+x\geqslant 0\end{cases}$ 时，求 $z=y-2x$ 的最大值和最小值.

温故而知新

4. 试用不等式组的解集描述下列平面图形.

(1) 以 $A(1,0)$，$B(2,0)$，$C(0,2)$，$D(0,1)$ 为顶点的等腰梯形的内部及其边界；

(2) 以 $A(2,0)$，$B(4,0)$，$C(3,2)$ 为顶点的三角形的内部及其边界.

5. 当 x，y 满足 $\begin{cases}x+5y-5\leqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ x\leqslant 3\end{cases}$ 时，求 $z=x-y$ 的最大值和最小值.

6. 某工厂在计划期内要安排生产甲、乙两种产品，每生产一件产品甲可获利 2

元，每生产一件产品乙可获利 3 元．加工每件产品甲需要消耗 A 原料 4 kg，占用设备工时数为 1；加工每件产品乙需要消耗 B 原料 4 kg，占用设备工时数为 2．工厂计划内库存 A 原料 16 kg，库存 B 原料 12 kg，设备使用工时数为 8，问如何安排生产计划可使该工厂获利最多？

阅读与思考

一门应用数学学科——运筹学简介

本节讨论了简单线性规划问题，问题中共涉及两个变量，由此已经可以体会出线性规划理论的应用价值，一般线性规划的数学模型及其解法是由丹捷格（G. B. Dantzig）在1947年为解决美国空军军事规划问题时提出的．此后，随着线性规划在理论上趋于成熟，特别是在电子计算机能处理成千上万个变量和决策条件的线性规划问题之后，线性规划的应用领域更为广泛和深入，从解决技术问题的最优化设计到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策等领域都可以发挥作用．线性规划已经成为现代科学管理的重要手段之一．

由于现实问题的复杂性，变量之间关系的多样性，从军事科学、工农业生产、经济和社会问题等诸多领域不断提出新问题，产生新的数学模型，这些问题的研究和解决导致一门内容丰富的应用数学学科——运筹学的产生和发展，线性规划只是运筹学的一个分支．运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的许多问题，为决策者选择最优决策，提供定量依据．

在建立和解决实际问题中的各类数学模型（如能源模型、教育模型、军事对策模型、宏观经济模型）的过程中，运筹学形成了许多分支，运筹学的主要分支包括数学规划（线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等），图论与网络，排队论（随机服务系统理论），存贮论，对策论，决策论，维修更新理论，搜索论，可靠性和质量管理等．

运筹学的早期研究可追溯到20世纪初．军事运筹学中的兰彻

斯特（Lanchester）战斗方程是在1914年提出的，排队论的先驱丹麦工程师爱尔朗（Erlang）1917年在哥本哈根电话公司研究电话通讯系统时提出了排队论的一些著名公式，存贮论的最优批量公式是在上世纪20年代初提出的，等等．运筹学的早期应用主要集中在军事领域，最早的运筹学研究小组成立于20世纪30年代末，由一些英、美科学家组成，其目的是研究战争中的一些战术性问题．例如，如何配置雷达才能更好地应付德国的空袭，遭受德国潜艇攻击时如何使船队损失最少，反潜深水炸弹爆炸深度多少最合理等问题，为决策者选择最优决策，提供定量依据．稍后，英、美军队中的一些运筹学研究组织开始着重研究战略性问题，例如未来武器系统的设计和未来战争的战略，甚至分析苏联政治局计划的行动原则和将来的行动预测．同时，运筹学在民用方面的应用也得到了蓬勃的发展．在市场销售方面，应用于广告预算和媒介的选择，竞争性定价，新产品开发，销售计划的制定；在库存管理方面，应用于多种物资库存量的管理，确定某些设备的能力或容量；在空运方面，应用于飞行航班和飞行机组人员服务时间的安排；在计算机和信息系统方面，应用于计算机的内存分配，研究不同排队规则对磁盘和磁鼓工作性能的影响；在城市管理方面，应用于各种紧急服务系统的设计和运用，等等．这些只是对运筹学应用的粗略描述．特别在经济领域，新的数学模型的建立和研究使一些杰出的经济学家获得了诺贝尔经济学奖．

上世纪50年代中期，钱学森、许国志等教授把运筹学从西方引入我国，并结合我国的特点在国内推广应用．我国的运筹学工作者为解决粮食部门的合理粮食调运问题提出了“图上作业法”，给出邮递员合理投递路线的国外称之为“中国邮路问题”的解法．60年代，以华罗庚为首的一批数学家积极推广优选法，把优选法应用于配方、配比的选择，生产工艺条件的选择，工艺参数的确定，工程设计参数的选择，仪器仪表的调试等，为我国运筹学的研究和应用赶超国际先进水平奠定了基础．

小结与复习

一、指导思想

学生将通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，求解一元二次不等式，并解决一些实际问题；能用二元一次不等式组表示平面区域，并尝试解决一些简单的二元线性规划问题；认识基本不等式并进行简单应用，体会不等式、方程及函数之间的联系.

二、内容提要

本章讨论不等式问题，内容主要涉及如何证明不等式，如何解不等式以及如何应用不等式求函数的最值和解决生产实际问题.

在证明不等式的部分，本章证明了不等式的5个基本性质和2个定理，它们分别是：

不等式的基本性质	1 如果 $a \leqslant b$，且 $b \leqslant a$，那么 $a=b$.
	2 如果 $a>b$，且 $b>c$，那么 $a>c$.
	3 设 $a>b$，那么 $a+c>b+c$.
	4 设 $a>b$，若 $c>0$，则 $ac>bc$；若 $c<0$，则 $ac<bc$.
	5 如果 $a>b$，且 a，b 同号，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.
定理1	对任意实数 a，b，必有 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立）.
定理2	如果 a，b 是正实数，那么 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立）.

不等式的性质和定理是证明不等式的基础，证明不等式有很多种方法，本章只介绍了具有一般意义的两种方法，也是证明不等式

的基本方法，这两种证明不等式的基本方法可以总结为：

方法 1：比较法；

方法 2：综合法.

在解不等式的部分，本章主要讨论了一元二次不等式的解法. 求解一元二次不等式，主要是借助二次函数的图象，根据函数的零点，直接得出一元二次不等式的解集，设 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$.

判　别　式	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=f(x)$的图象			
$f(x)>0$ 的解集是	$\{x\mid x<x_1 或 x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\}$	**R**
$f(x)<0$ 的解集是	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$f(x)\geqslant0$ 的解集是	$\{x\mid x\leqslant x_1 或 x\geqslant x_2\}$	**R**	**R**
$f(x)\leqslant0$ 的解集是	$\{x\mid x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$	$\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$\varnothing$

二元一次不等式组的解集可以通过平面图形来描述. 设 $f(x, y)=ax+by+c(b\geqslant0)$，记方程 $ax+by+c=0$ 表示的直线为 l. 当 $b>0$ 时，$f(x, y)\geqslant0$ 的解集可以通过直线 l 上方(含边界)的平面区域来描述，$f(x, y)\leqslant0$ 的解集可以通过直线 l 下方(含边界)的平面区域来描述. 当 $b=0$，且 $a>0$ 时，$f(x, y)\geqslant0$ 的解集可以通过直线 l 右边(含边界)的平面区域来描述，$f(x, y)\leqslant0$ 的解集可以通过直线 l 左边(含边界)的平面区域来描述，其他情况可以利用不等式的性质等价转化为上述情况处理.

在求函数最值的部分，本章讨论了两种函数最值的求法：

一种是能用基本不等式求出最大值或最小值的函数. 在用基本不等式求函数最值的时候，必须注意三个要点，这三个要点分别是：

1. 涉及的量必须为正实数；
2. 不等式一边应当为定值；
3. 等号成立时自变量的值必须在函数的定义域内.

一旦这三个要点不能同时被满足，说明该函数的最值不能用基本不等式来求解.

另一种是定义在一个多边形区域上的二元一次函数最值的求法. 设 $f(x, y)$ 是定义在一个多边形区域上的二元一次函数，$f(x, y)$ 的最值可以用图解法来求解.

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求.

(1) 理解不等式的性质及其证明.

(2) 掌握一元二次不等式的解法.

(3) 掌握两个正数的算术平均值不小于几何平均值的定理，并会应用.

(4) 掌握用综合法和比较法证明简单的不等式.

(5) 了解二元一次不等式表示平面区域，了解线性规划的意义，并能简单应用.

2. 需要注意的问题.

(1) 对于公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 应注意以下两点：

一是公式成立的条件，前者只要求都是实数，而后者要求都是非负实数.

二是它们都带有等号，因此，对两个定理中“当且仅当 $a=b$ 时取等号”这句话中的“当且仅当”的含义要搞清楚.

(2) $Ax+By+C>0$ 表示的是直线 $Ax+By+C=0$ 的某一侧的平面区域（不包括边界），而 $Ax+By+C\geqslant 0$ 所表示的平面区域包括边界直线 $Ax+By+C=0$. 由于对在直线 $Ax+By+C=0$ 的同一侧的所有点 (x, y)，实数 $Ax+By+C$ 的符号相同，所以只需在此直线的某侧任取一点 (x_0, y_0)，把它的坐标代入 $Ax+By+C$，由其值的符号即可判断 $Ax+By+C>0$ 表示直线的哪一侧.

四、参考例题

例1 已知 a，b，c，d 都是正数.

求证：$(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$.

分析 运用平均值不等式，结合不等式的基本性质，是证明本题的关键.

证明 ∵ a，b，c，d 都是正数，

∴ $ab>0$，$cd>0$，$ac>0$，$bd>0$.

∴ $\dfrac{ab+cd}{2}\geqslant\sqrt{ab\cdot cd}>0$，

$\dfrac{ac+bd}{2}\geqslant\sqrt{ac\cdot bd}>0$.

由不等式性质，得 $\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{4}\geqslant abcd$，

即 $(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$.

例 2 某工厂要建造一个长方体无盖贮水池，其容积为 4 800 m^3，深为 3 m，如果池底每 1 m^2 的造价为 150 元，池壁每 1 m^2 的造价为 120 元，问怎样设计水池能使总造价最低，最低总造价是多少元?

解 设水池底面一边的长度为 x 米，则另一边的长度为 $\dfrac{4\ 800}{3x}$ 米，又设水池总造价为 y 元. 根据题意，得

$$y=150\times\frac{4\ 800}{3}+120\left(2\times 3x+2\times 3\times\frac{4800}{3x}\right)$$

$$=240\ 000+720\left(x+\frac{1\ 600}{x}\right)$$

$$\geqslant 240\ 000+720\times 2\sqrt{x\cdot\frac{1\ 600}{x}}$$

$$=240\ 000+720\times 2\times 40=297\ 600.$$

当 $x=\dfrac{1\ 600}{x}$，即 $x=40$ 时，y 有最小值 297 600.

因此，当水池的底面是边长为 40 m 的正方形时，水池的总造价最低，最低总造价是 297 600 元.

复习题十

学而时习之

1. 证明下列不等式：

(1) 若 $a>b>0$，则 $a^3b>ab^3$；

(2) 对任意 $x\in\mathbf{R}$，$x(x+2)<(x+1)^2$；

(3) 对任意 $x\in\mathbf{R}$，$x^2>4x-5$；

(4) 若 $x\neq-1$，则 $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}\geqslant-\dfrac{1}{3}$.

2. 证明不等式：

(1) 若 $a<b<0$，$c<d<0$，则 $ab>cd$；

(2) 若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $a^2c>b^2d$.

3. 证明不等式：

(1) 若 a，b，c 是非负实数，则

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\geqslant 6abc；$$

(2) 若 a，b 是非负实数，则 $a+b+2\geqslant 2(\sqrt{a}+\sqrt{b})$；

(3) 若 $a>0$，$b>0$，则 $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\geqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

4. 解不等式：

(1) $-3x^2+5x-4<0$；　　(2) $4x^2-20x+25\leqslant 0$；

(3) $4<x^2-x-2<10$；　　(4) $|2x^2-x-2|<1$.

5. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{4-x}-x$ $(0<x<4)$ 的最小值.

6. 求函数 $f(x)=(1+2x)x^2(1-2x)\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$的最大值.

温故而知新

7. 设 $P(a,b)$为直线 $y=2x$ 上的点，如果点 P 与点 $B(2,1)$之间的距离不超过 3，求

a 的取值范围.

8. 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$，求 a 和 b 的值.
9. 已知 $m<n$，试写出二个一元二次不等式，使它的解集分别为

(1) $(-\infty,\ m)\cup(n,\ +\infty)$； (2) $(m,\ n)$.

10. 在约束条件 $\begin{cases}x+2y\leqslant 10,\\ x+y\geqslant 1,\\ y\leqslant 5,\\ x\leqslant 1\end{cases}$ 下，求 $f(x,\ y)=y-x$ 的最大值.

11. 在约束条件 $\begin{cases}x+3y\geqslant 3,\\ x+y\geqslant 2,\\ y\geqslant 1\end{cases}$ 下，求 $f(x,\ y)=x+2y$ 的最小值.

12. 某旅店有 200 张床位．若每张床位一晚上租金为 50 元，则可全部出租，若将出租收费标准每晚提高 $10x$ 元（x 为正整数），则出租的床位会相应减少 $10x$ 张．若要使该旅店某晚的收入超过12 600 元，则每个床位的出租价格可定在什么范围内？
13. 一个化肥厂生产甲、乙两种混合肥料，生产 1 车皮甲种肥料需要的主要原料是磷酸盐 4 吨，硝酸盐 18 吨，产生的利润为 10 000 元；生产 1 车皮乙种肥料需要的主要原料是磷酸盐 1 吨，硝酸盐 15 吨，产生的利润为 5 000 元，现有库存磷酸盐 10 吨，硝酸盐 66 吨，如何计划生产可使工厂获利最多？
14. 证明不等式：

(1) 若 $a>0$，$b>0$ 且 $a\neq b$，则 $ab^2+a^2b<a^3+b^3$；

(2) 若 a，b 是实数且 $a\neq b$，则 $ab^3+a^3b<a^4+b^4$；

(3) 把(1)和(2)中的不等式推广到一般情形，并证明你的结论.

上下而求索

汽车加油的学问

随着人们生活水平的不断提高，轿车已经进入普通老百姓的家庭．有了轿车就需要购买汽油，如果每 L 汽油的价格经常发生波动，如何购买汽油最经济是值得研究的一个问题.

假设甲、乙、丙三位朋友总是同时到某一加油站购买汽油，甲每次总是花费100元，乙每次总是购买30 L汽油，丙则是随意的，有时候花费100元，有时候购买30 L汽油.

(1) 如果甲、乙、丙三人购买了两次汽油，第一次油价为2.96元/L，第二次油价为3.08元/L，那么甲、乙、丙三人购买汽油的方式哪种最经济？

(2) 你能提出更一般的数学问题并给出解答吗？

附 录

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）

中文名	英 文 名	页 码
三角形的正弦定理	sine theorem of triangles	5
扩充的正弦定理	extended sine theorem	7
三角形的余弦定理	cosine theorem of triangles	10
仰角	angle of elevation	16
俯角	angle of depression	16
斐波拉契数列	fibonacci sequence	32
黄金数列	golden sequence	32
数列	sequence	34
数列的项	term of sequence	34
首项	leading term	34
第 n 项	n-th term	34
有穷数列	finite sequence	34
无穷数列	infinite sequence	34
通项公式	general term formula	36
递推公式	recursive formula	39
初始条件	initial condition	39
等差数列	arithmetic progression	42
公差	common difference	42
等比数列	geometric progression	51
公比	common ratio	51